

Kurt Gödel - Logikgenie des 20. Jhdts. eine Erläuterung seiner beiden Unvollständigkeitstheoreme

Klausurzusammenfassung:

Was sagen die Gödel'schen Unvollständigkeitstheoreme aus:

- 1: Ein arithmetisches formales System ist entweder unvollständig oder widersprüchlich (es kann nicht beide Eigenschaften haben)
- 2: Man kann die Konsistenz nicht innerhalb des Systems beweisen (aber es könnte vielleicht Metamathematische Mittel geben mit denen die Konsistenz beweisbar ist).

Welche Techniken verwendet Gödel um seine Theoreme zu beweisen:

Gödelisierung (jedes Symbol, jedes Axiom und jeder Satz bekommen ein „Gödel-Zahl“)

Arithmetisierung der Metamathematik (man kann weitere Gödel-Zahlen ausrechnen, die genau einem bestimmten Satz des formalen Systems entsprechen).

Diagonalisierung (man kann durch Einsetzen der Gödel-Zahlen in Sätze bestimmte Sätze finden die nicht durch die Ableitungsregeln des Systems herleitbar sind. Sobald man einen gefunden hat, kann man durch erneutes Einsetzen beliebig viele weitere solche Sätze finden)

Grundlegendes Verständnis (Logik I + Logik II)

Das Hilbert-Programm versuchte ein vollständiges konsistentes System der Mathematik herzustellen (axiomatische Methode).

Alles was aus den Axiomen folgt ist wahr.

Aber nicht alles folgt aus den Axiomen (=Unvollständigkeit)

Gödel zeigt eine inhärente (grundsetzliche) Begrenzung der axiomatischen Methode.

Vorlesung:

1931 „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I“

Zur Fortsetzung des Aufsatzes ist es nicht mehr gekommen.

Revolutionärer Aufsatz widersprach allem was Fachleute für richtig hielten. Revolutionär ist eine Erkenntnis dann, wenn sie alles bestehende Wissen als falsch bestätigt. Bedeutendste wissenschaftliche Leistung von Gödel.

Gödel war sehr introvertiert.

Lebenslauf:

- 1906 Geburt Brünn
- 1924 Matura Brünn

- 1926 Beginn Studium der Mathematik und Logik
- 1929/1930 Dissertation über "Vollständigkeit der Quantorenlogik" (Vollständigkeit der Junktoren war bereits bewiesen)
- 1930/1931 Habilitationsschrift: Gödel veröffentlicht die beiden Unvollständigkeitstheoreme "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme 1"
- 1931 - 1939 Drei Besuche in Princeton
- 1934 Hahn stirbt, Gödel bekommt Depression, Hans Hahn -> Mitglied des "Wiener-Kreises" (Kritiker an der Metaphysik)
- 1936 Moritz Schlick wird von Studenten erschossen -> erneute Depression
- Ehe mit Adele Nimburski "Nachtfalter"
- 1939 Ausreise in die USA (Flucht vor Nationalsozialismus)
- Princeton
- Beschäftigung mit Physik und Philosophie ("Gödel'scher Gottesbeweis")
- Kontakt mit Einstein und Oskar Morgenstern
- 1948 Staatsbürgerschaft USA (Gödel: "auch die USA könnte eine Diktatur werden!")
- Diverse Auszeichnungen
- 1976 Pension
- 1978 Tod in Princeton (starb an Unterernährung, weil er Angst hatte vergiftet zu werden)

Inhalt

1. Erläuterung des Titels, Einführung in die Materie
2. Erklärung warum die Theoreme von Gödel so revolutionär waren
 - a. Kurz: Hilbert'sche Programm (David Hilbert) für die Mathematik wurde als absolut wichtig und korrekt angesehen - Gödel hat bewiesen das es undurchführbar ist.
3. Beweis der Unvollständigkeitstheoreme
 - a. Besprechung der Methoden
4. Soziale Verhältnisse von Gödel zu anderen Philosophen (Wiener Kreis usw...)

Der Aufsatz (ca. 25 Seiten) ist unterteilt in vier Abschnitte:

1. (kurz)	G1: 1. Unvollständigkeitstheorem
2. (lang)	
3. (lang)	
4. (2 Seiten)	G2: 2. Unvollständigkeitstheorem

Es war eine Fortsetzung (zu Punkt 4) geplant, dazu ist es jedoch nicht gekommen.

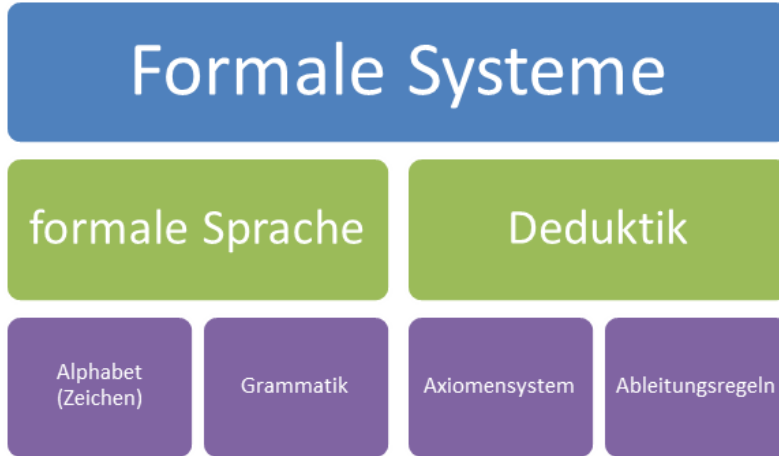
Hilbert-Programm geht davon aus, dass es keine unentscheidbaren Sätze gibt.

G1: Es gibt in Principia Mathematica und verwandten System formal unentscheidbare Sätze!

1. Erläuterung

Principia Mathematica (PM) und verwandte Systeme

Formale Systeme



Beispiel: MIU-System

Douglas Hofstaedter "Gödel, Escher, Bach" (1985)

Formale Sprache

- Alphabet (Zeichen, Symbole) zB M, I, U
- Grammatik: zB Jede beliebig lange Reihenfolge der Zeichen ist ein Satz

Deduktik

- Axiomensystem: Einziges Axiom ist MI, werden angenommen, nicht bewiesen.
- Schlussregeln (Ableitungsregeln, Beweisregeln):
 - 1) $\varphi \rightarrow \varphi U$ (An jeden Satz kann ein U angehängt werden)
 - 2) $M\varphi \rightarrow M\varphi\varphi$ (Bei einem Satz der mit M beginnt darf alles dahinter verdoppelt werden)
 - 3) $\varphi U U \rightarrow \varphi$ (Zwei U's am Ende dürfen weg gelassen werden)

Beweis 1 (Ableitung)

	Satz	Regel
1	MI	Axiom
2	MIU	(1, Regel 1)
3	MIUIU	(2, Regel 2)
4	MIUIUU	(3, Regel 1)
5	MIUI	(4, Regel 3) = Theorem, beweisbarer Satz

Jeder Satz ist ein Axiom ODER er kann aus Anwendungen der Schlussregeln gebildet werden.
Die Sätze mit denen ein Beweis aufhört nennt man Theorem oder beweisbare Sätze.

Beweis 2

	Satz	Regel
1	MI	Axiom
2	MII	(1, Regel 2)
3	MIII	(2, Regel 2)
4	MIIIIIIII	(3, Regel 2)
5	MIIIIIIIIU	(4, Regel 1) = Theorem, beweisbarer Satz

Jeder Satz eines Beweises muss ein Axiom oder ein beweisbarer Satz sein.

(Zum nachdenken: Ist MU, MIMI ein Theorem des Systems?)

Aufgrund der Regeln und der Axiome ist es nicht möglich das anfängliche Axiom "MI" weg zu bekommen.

Die Eigenschaften der Axiome sind durch Anwendung der Regeln "erblich". Wenn es keine Regel gibt die die Eigenschaften entfernt oder ändert, bleiben diese IMMER erhalten.

Es kann einfach gezeigt werden, dass ein Satz ein Theorem eines Systems ist. Zu zeigen, dass etwas KEIN Theorem ist, ist sehr viel schwieriger.

Unterscheidung (Begriffe geprägt durch Hilbertprogramm)

- Formales System
- **Metamathematik (syntaktische Erörterungen) ... Beweistheorie**

Objektsprache - Sprache in der das Objekt benannt wird (innerhalb des Systems)

Metasprache - Sprache in der über das Objekt gesprochen wird (außerhalb des Systems)

wenn man über formale Systeme spricht kann man das auf 2 Arten:

- **syntaktische** Weise: nur Aussagen über Zeichengestalten und Anordnungen von Zeichengestalten (zB jeder Satz im MIU beginnt mit "MI")
- **semantische** Weise: Hier werden Bedeutungen festgestellt
zB MIU system: M = 5, I = 2, U =3.
Bedeutung: ein Satz ist wahr im MIU System wenn man alle Zeichen multipliziert das Ergebnis eine Gerade Zahl ist.

Syntaktik ist nicht von der Semantik abhängig. Sie kann alleine Betrachtet werden.

Seit Tarski beide Arten von Diskussion als Metamathematik bezeichnet (syntaktisch + semantisch).

Formale Systeme wie PM

Principia Mathematica ist ein Teil des HILBERT-Programms: Lösung für die Grundlagenkrise der Mathematik in der Mitte des 20. Jahrhunderts.

Hilbert wollte beweisen, dass bestimmte Aussagen in formalen Systemen nicht erstellt werden können.

Formale Systeme wie PM = **Formale arithmetische Systeme**

verwandte Systeme wie PM: es werden über natürliche Zahlen gesprochen, und es sind operationen wie addition und multiplikation möglich.

Viele höhere Systeme sind Systeme wie PM daher gelten Gödels Unvollständigkeitstheoreme dort auch überall.

Robinson-Arithmetik (definiert von Raphael Robinson)

Es wird über natürliche Zahlen \mathbb{N}_0 gesprochen $\{0, 1, 2, \dots\}$

1. $x \neq y \rightarrow x' \neq y'$
2. $x \neq 0 \rightarrow \exists y: x = y'$
3. $\forall x: 0 \neq x'$
4. $x + 0 = x$
5. $x + y' = (x + y)'$ $3 + (5)' = 3 * 6 = (3 + 5)' = 9$
6. $x * 0 = 0$
7. $x * y' = (x * y) + x$ $3 * (4)' = 3 * 5 = 3 * 4 + 3 = 15$

Gödel diskutiert in seinem Aufsatz die Peano-Arithmetik um seine Unvollständigkeitstheoreme zu beweisen.

Formal unentscheidbare Sätze

φ ist formal unentscheidbar in S (= ein System) genau dann wenn:

1. φ ist kein Theorem von S
2. $\neg\varphi$ ist kein Theorem von S

Aber einer der beiden obigen Theoreme **muss** wahr sein und einer falsch.

Daraus folgt: **Es gibt einen wahren arithmetischen Satz der kein Theorem von S ist.**

Bsp: Gleichheit von Nachfolger und Vorgänger:

- $\forall x: \neg x = x'$
- $\neg(\forall x: \neg x = x')$

Beide Sätze lassen sich innerhalb der Robinson-Arithmetik nicht beweisen.

Bsp 2: Kommutativ-Gesetz Addition:

- $\forall x \forall y: (x + y = y + x)$
- $\neg(\forall x \forall y: (x + y = y + x))$

Beide Sätze lassen sich in der Robinson-Arithmetik nicht beweisen.

Aus jedem der obigen Bsp kann man sagen: Die Robinson-Arithmetik ist unvollständig.

Wenn ein System unentscheidbare Sätze enthält, dann hat es eine "Lücke" (es ist **unvollständig**).

" S ist unvollständig genau dann wenn es in S mindestens einen formal unentscheidbaren Satz gibt."

RA':

Es gilt die Robinson-Arithmetik und wir definieren zusätzlich folgende Axiome:

8. Axiom: $\forall x: \neg x = x'$

9. Axiom: $\forall x \forall y: (x + y = y + x)$

Es gibt trotzdem noch Sätze die nicht beweisbar sind:

Bsp: Kommutativ-Gesetz Multiplikation:

- $\forall x \forall y: (x * y = y * x)$
- $\neg(\forall x \forall y: (x * y = y * x))$

RA'':

Zusätzlich zum RA' definieren wir folgendes Axiom:

10. Axiom: $\forall x \forall y: (x * y = y * x)$

Theorem von Gödel: Ein unvollständiges System wird immer unvollständig bleiben, egal wieviele Axiome man hinzufügt, AUßER man akzeptiert Widersprüche (wodurch das System dann aber inkonsistent wird).

G1: Jedes konsistente arithmetische formale System ist unvollständig.

S ist inkonsistent (widersprüchlich) genau dann wenn es einen Satz φ gibt sodass gilt:

- φ ist ein Theorem
- $\neg\varphi$ ist ein Theorem

Obige Definition wird als "einfach inkonsistent" (simply inconsistent) bezeichnet.

Ein Satz der widerlegt werden kann, wäre zumindest "widerlegbar" - dadurch wäre das System dann noch nicht unvollständig.

ex falso sequido libet (aus widersprüchlichem folgt beliebiges)

1) φ 2) $\neg\varphi$ 3) $(\varphi \vee \psi)$

3 und 2) ψ

bsp: der mörder ist entweder der butler oder der koch, und der butler war es nicht => es war der koch

Ein inkonsistentes System ist nicht erwünscht, weil völlig absurd.

Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit sind in Systemen niemals gleichzeitig vorhanden - Man muss sich für eines entscheiden.

nicht beweisbar bzw nicht widerlegbar in RA:

$\forall x: 0 * x = 0$ (obwohl $\forall x: x * 0 = 0$ ein Axiom ist)

bsp: nicht beweisbar: $\forall x: x \neq x'$

aber beweisbar in RA:

$0 \neq 0'0' \neq 0''$

$0'' \neq 0'''$

man kann es für jede einzelne Zahl beweisen, ABER nicht für ALLE Zahlen.

- | | |
|---|--------------------------------------|
| 1) $\forall x: 0 \neq x'$ | 3. RA Axiom |
| 2) $0 \neq 0'$ | aus 1) Allspezialisierung: $x = 0$ |
| 3) $\forall x \forall y: (x \neq y \Rightarrow x' \neq y')$ | 1. RA Axiom |
| 4) $\forall y: (0 \neq y \Rightarrow 0' \neq y')$ | aus 3) Allspezialisierung: $x = 0$ |
| 5) $(0 \neq 0' \Rightarrow 0' \neq 0'')$ | aus 4) Allspezialisierung: $y = 0'$ |
| 6) $0' \neq 0''$ | aus 2) und 5) : Modus Ponens |
| 7) $\forall y: (0' \neq y \Rightarrow 0'' \neq y')$ | aus 3) Allspezialisierung: $x = 0'$ |
| 8) $(0' \neq 0'' \Rightarrow 0'' \neq 0''')$ | aus 4) Allspezialisierung: $y = 0''$ |
| 9) $0'' \neq 0'''$ | |

Man kann jetzt beweisen das jede einzelne Zahl unterschiedlich zu seinem Nachfolger ist.

Wie kann man jetzt beweisen das JEDE Zahl unterschiedlich von ihrem Nachfolger ist?

In der klassischen Logik gibt es keine Möglichkeit um aus unendlich vielen Resultaten eine Schlussfolgerung zu ziehen (und es kann auch keine geben).

Grund: Ableitungen in der klassischen Logik sind IMMER eine endliche Folgen von Sätzen (daher kann man nicht bis unendliche gehen). Es gibt keine Ableitungen mit unendlich vielen Schritten.

Der Gödel-Beweis funktioniert nur wenn die Ableitung aus endlichen vielen Schritten besteht.

Infinitäre Logik ist eine Art der nichtklassischen Logik. Es gibt mehrere Unterschiede zur klassischen Logik, einer davon ist zB dass man aus unendlichen Resultaten Schlüsse ziehen kann.

Wird in der Mathematik verwendet - in der Philosophie werden diese Möglichkeiten aber eigentlich nicht gebraucht.

Metamathematischer Beweis

(Beweistheoretische Überlegung):

- 1) Alle Axiome haben Eigenschaft ϵ
- 2) ϵ ist erblich (...)
- 3) Satz hat ϵ nicht.

Regeln können die Eigenschaften verändern (neue hinzufügen, alte verwerfen)

Um einen Beweis zu führen, muss man Eigenschaften finden die geeignet sind (ist oft sehr schwierig).

Beispiel:

$v = v'$ $v' = v$ problematische Gleichung!!!

Ein Satz φ ist unproblematisch wenn φ keine problematische Gleichung als Teil enthält.

unproblematisch ist eine Eigenschaft.

Robinson-Arithmetik:

Axiome:

- a. $\forall x \forall y: (x \neq y \rightarrow x' \neq y')$
- b. $\forall x: (x \neq 0 \rightarrow \exists y: x = y')$
- c. $\forall x: (0 \neq x')$
- d. $\forall x: x + 0 = x$
- e. $\forall x \forall y: x + y' = (x + y)'$ $3 + (5)' = 3 * 6 = (3 + 5)' = 9$
- f. $\forall x: (x * 0 = 0)$
- g. $\forall x \forall y: x * y' = (x * y) + x$ $3 * (4)' = 3 * 5 = 3 * 4 + 3 = 15$

Alle Axiome in RA sind unproblematisch.

Schlussregeln:

Modus Ponens: $(\varphi \Rightarrow \tau), \varphi, \tau$

Allspezialisierung; $\forall \alpha \varphi: \varphi^{\tau}/\alpha$

Alle Regeln in RA vererben die unproblematische Eigenschaft.

Daher kann man nicht zur oben genannten problematischen Gleichung kommen: Die Eigenschaft wird nie hinzugefügt. (Ähnlich wie das MIU System immer mit MI anfangen muss, weil es nie entfernt wird)

Modelltheoretischer Weg

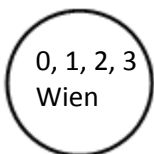
gibt es erst seit Tarski (1930/40)

Wir stellen uns einen Sachverhalt vor, indem **alle Axiome wahr sind**. Und es soll dann gezeigt werden, dass ein bestimmter Satz falsch ist.

Da aus wahren nichts falsches folgen kann, kann der Satz auch kein Theorem des Modells sein.

Wird von Logikern dem Metamathematischem Beweis vorgezogen, weil einfacher.

Modell/Universu m/Welt



In unserem Modell gelten Sätze für alle Elemente des Modells.

$$\forall x: \neg x = x'$$

	'
$x \in N$	$x+1$
Wien	Wien

Axiome des Universums: wenn zwei Dinge verschiedene Nachfolger haben sind sie verschieden, gilt für Zahlen und auch für Wien. Deshalb sind zB 2 u Wien auch voneinander verschieden

alle Dinge die nicht 0 sind, sind Nachfolger von etwas. (Wien ist Nachfolger von Wien)

0 ist nicht der Nachfolger von irgendetwas.

Satz ist falsch, weil Wien ist der Nachfolger von Wien! Nur für Zahlen, aber mit Wien → deshalb gilt es nicht für dieses Universum. Axiome sind wahr... und der Satz ist falsch → deswegen kann der Satz nicht aus den Axiomen folgen!

Um 1900 herum war die Mathematik eher praktischer Natur, erst langsam wurden die exakten theoretischen Grundlagen dazu entwickelt (es gab noch ungeklärte Grundbegriffe zB natürliche Zahlen, Funktionen, Unendlichkeit, Mengen,)
um 1900 herum, wurde die Mengenlehre von Cantor als absolut wahr betrachtet.

Die Mengenlehre von Cantor (Metaphysisch konzipiert - Cantor machte daraus eine Philosophie)
„Menge = Zusammenfassung bestimmter wohl unterschiedener Objekte unserer Anschauungen und unseres Denkens zu einem Ganzen“

Cantor wollte keine mathematische Theorie schaffen, sondern Beitrag zu einer ontologischen Theorie leisten über die Wirklichkeit – erst beim Ausbau dieser zunächst metaphysisch konzipierten Theorie wurde zunehmend klar, dass man innerhalb dieser Theorie Begriffe definieren kann, die in dieser Zeit als definitionsbedürftig galten

In der Mengenlehre kann man eine exakte Definition von Funktion u natürlicher Zahlen geben + viel genaueren Begriff von unendlich geben als das vor der Mengenlehre möglich war. (zB genauso viel gebrochene Zahlen zwischen 0 u 1 wie es natürliche Zahlen gibt? Antwort in Mengenlehre möglich (ja)).

Auch Zahlenmenge die mehr Elemente enthalten als die unendlichen Mengen der natürlichen bzw. gebrochenen Zahlen – Stufen der Unendlichkeit „mächtiger als andere“, Grade der Mächtigkeit = Offenbarung für viele Mathematiker

Hilbert 1904 Kongress in Heidelberg:

“Niemand soll uns jemals aus diesem cantorschen Paradies vertreiben können“

ernsthaft bedroht, weil in dieser Mengenlehre Widersprüche gefunden werden - Cantor selbst hat schon solche Widersprüche entdeckt (Paradoxie von Cantor) – von dieser hat er den Blick abgewendet - obwohl er eig verpflichtet gewesen wäre, die Konsequenzen daraus zu ziehen

Es gibt unterschiedlich mächtig unendliche Mengen

Es konnten später jedoch Widersprüche bewiesen werden, die die Mengenlehre zu Fall brachte.

Russel hat einen enormen Widerspruch in der Mengenlehre entdeckt:

$\forall x(x \in R \leftrightarrow x \notin x)$

$R \in R \leftrightarrow R \notin R$

$R \notin R \leftrightarrow R \in R$

Widerspruch!!

Erklärung mit Worten:

Es gibt folgende Arten von Mengen:

- Normale Mengen (Menge der Schafe)
 - Mengen haben Elemente
 - Mengen beinhalten sich aber nicht selbst

- Abnormale Mengen (zB Allmenge)
 - Mengen haben Element
 - Mengen können auch sich selbst enthalten (bzw. andere Mengen)

R = Menge aller normalen Mengen (bereits jetzt schon Widerspruch, damit würde R ja sich selbst beinhalten und wäre dann eine Abnormale Menge, wodurch es sich dann wieder nicht beinhalten dürfte.)

Lt. Kant kann es keine Metaphysik als Wissenschaft geben, sie zu Widersprüchen führt.

Während dies bei der Metaphysik allgemein hin akzeptiert wurde, war dies bei der Mengenlehre nicht so einfach möglich.

Zwei Möglichkeiten mit einem Widerspruch umzugehen:

Verwerfen der Theorie

entweder das Verwerfen der Theorie; möglich, wenn die Theorie nicht besondere Vorzüge hat, auf die man nicht verzichten will – zB Kant: Kritik der reinen Vernunft – Beweis zu erbringen, dass Metaphysik als Wissenschaft nicht möglich ist – kann zeigen dass Metaphysik keine Wissenschaft ist, weil sie zu Widersprüchen führt -> Konsequenz: Verzicht auf die Metaphysik – Mensch hat zwar Drang diese Fragen zu beantworten, aber wissenschaftlich sind sie nicht zu beantworten

Versuch die Widersprüche zu beseitigen

Das Verwerfen der gesamten Theorie war in der Mengenlehre nicht möglich – weil Ergebnisse, die den Mathematikern wertvoll erschienen – da Grundlagendisziplin der Mathematik! Deshalb muss man versuchen die Widersprüche zu beseitigen – Vorschläge → ob man sicher sein kann, dass keine Widersprüche mehr auftreten – wichtig, dass man in der Lage ist evtl. zu zeigen, dass so eine Theorie keinen Widerspruch mehr enthält.

Hoffnung der Mathematiker: Hilbertsches Programm → nicht durchführbar, wenn Gödel mit seinen Unvollständigkeitstheoremen Recht hat. Große Bedeutung der Gödelschen Sätze.

Theorien

- **intuitive Theorien**
 - In natürlicher Sprache formuliert
 - Definitiver Sinn
 - Wahr oder Falsch
 - Kein exakter Begriff logischen Folgens
 - **Keine exakten Axiome**
- **axiomatische Theorien (zB Robinson-Arithmetik)**
 - Bsp. Robinson-Arithmetik
 - In natürlicher Sprache formuliert
 - Definitiver Sinn
 - Wahr oder Falsch
 - Kein exakter Begriff logischen Folgens
 - **exakte Axiome**
- **formales System (zB MIU-System)**
 - Formale Sätze (streng definiertes Vokabular)
 - kein definitiver Sinn
 - nicht Wahr oder Falsch
 - **exakter Begriff logischen Folgens (exakte Ableitungsregeln)**
 - **exakte Axiome**

Hilbert-Programm um Widerspruchsfreiheit von Theorien verlässlich nachzuweisen (1904 vorgestellt):

- **Theorien müssen formalisiert** in ein vollständiges konsistentes System (formales System konstruieren)
G1 beweist, dass es nicht möglich ist vollständige UND konsistente Systeme zu konstruieren.
- Durch metamathematische Beweisführung zeigen, dass **keine Widersprüche ableitbar** sind
finite Methoden (einfache, selbstverständliche Methoden -- jedoch nie klar definiert)
G2 weist darauf hin, dass Widerspruchsbeweise gar nicht allein mit finiten Methoden geführt werden können.

Bei allen Theorien gibt es Vorgangsweisen die nicht explizit formuliert sind, aber trotzdem akzeptiert werden. (Etikette, General Agreements)

Gödels Aussage ist eine Aussage über unendliche viele solche arithmetische Systeme.

Gödelsatz:

Für jedes arithmetische System: Es existiert ein Satz g der wahr ist genau dann wenn g kein Theorem in dem System ist, und damit ist das System unvollständig.

(Das ist ein Satz der von sich selbst behauptet unbeweisbar zu sein).

Beweis durch:

- **Gödelisierung**
- **Arithmetisierung der Metamathematik**
- **Diagonalisierung** (ziel: satz finden der genau dann wahr ist, wenn er kein Theorem des Systems ist)

Die drei Schritte bauen aufeinander auf.

Beispiel: IUMM \rightarrow 2311 (Gödel-Zahlen für den Satz)

Zu **Arithmetisierung der Meta-Mathematik**:

Jeder meta-mathem. Satz (=syntaktischer Satz, Symbole etc.) lässt sich arithmetisieren – zu jedem meta-mathem. Satz lässt sich ein arithm. Satz (Zahlen) bilden, der mit meta-mathem. Satz in gewisser Weise äquivalent. (nicht logisch äquivalent)

Beispiel für logische Äquivalenz: $\forall x F1x$; $\neg \exists \neg F1x$, aufgrund der Bedeutung von logischen Wörtern;

Ist mit dem Satz aufgrund der Regeln der Gödelisierung (Regeln für die Zuordnung der Zahlen etc.) äquivalent. Verschiedene Bedeutungen, Sinn \rightarrow aber aufgrund der Gödelisierungsregeln ist der eine Satz gdw wahr wenn der andere Satz wahr ist.

Diese Arithmetisierung kann dazu verwendet werden, um zu dem Gödelsatz „g“ zu gelangen.

Beispiel für Arithmetisierung:

Bezirkshauptmannschaft – Nummernverteilung Müller:17, Kamitz:29.

Satz: Müller darf vor Kamitz hineingehen. Arithmetischer Satz: $17 < 29$

der arithmetische Satz ist gdw wenn der andere Satz auch wahr ist. Satz über 2 Personen wird über Satz in zwei Zahlen transformiert.

Beispiel MIU-System:

„M, I, U sind Symbole des formalen Systems“ zurückführen auf den Satz „1,2,3 sind Gödel-Zahlen von Symbolen“ – für arithmetischen Satz für den Ausdruck „sind Gödel-zahlen von Symbolen“ = muss umfangsgleich sein, einen arithmetischen Begriff = Klasse von Zahlen muss identisch sein mit jener Klasse von Zahlen die Gödel-Zahlen von Symbolen sind.

zB Y-Zahl \rightarrow Definiert: X ist eine Y-Zahl genau dann wenn $x > 0$, $x < 4$; = die Menge der Gödel-Zahlen von Symbolen. \rightarrow Y-Zahl = umfangsgleich)!

„1,2,3 sind Y-Zahlen“

Äquivalenz aufgrund der Gödelisierungsregeln („Gödelisierungsäquivalenz“ \rightarrow in der Fachliteratur nicht üblich, eher unangebrachte Begriffe zB „übersetzen“ (weil bedeutungsgleicher Satz), „spiegeln“...

„umfangsgleich“ – Definition – Beispiel:

die Begriffe können zwar etwas verschiedenes bedeuten, sie betreffen aber die gleichen Zahlen/Dinge

Gleichseitige Dreiecke, gleichwinkelige Dreiecke \rightarrow beweisbare geometrische Gründe, dass jedes gleichwinkelige Dreieck gleichseitig ist u jedes gleichseitiges Dreieck gleichwinkelig ist. Die Begriffe gleichwinkelig u gleichseitig sind nicht bedeutungsgleich, dennoch betreffen sie die gleiche Menge von Dingen. = mathematisch äquivalent;

„MIU“ ist ein Satz.; 123 ist die Gödel Zahl eines Satzes.

Formulierung eines arithmetischen Begriffes der mit dem Begriff GZ eines Satzes umfangsgleich ist.

A-Zahl - Definition

Kennzeichen dekadischen Stellenwertsystemen (=unser Zahlensystem) vgl. mit römischen Ziffernsystem (teilweise additives System zB VI =V+I, aber nur teilweise weil IV = V-I)

Begriff des A-Satzes arithmetisch definieren zum Ausdruck bringen, was passiert wenn man Ziffern miteinander verkettet. Unterscheidung von Zahlen und Ziffern (vgl. Namen von den dadurch Benannten Dingen zB Wien → Name der Stadt vs. Stadt Wien) Zahl „fünf“ → Bezeichnet durch V, 5, 5x1 etc. – verschiedene Bezeichnungen für denselben Gegenstand;

Aneinanderreihung von Ziffern zB 12 → dadurch entsteht $10 \times 1 + 2$ – durch die Aneinanderreihung entsteht eine Ziffer für die Zahl 12, es passiert etwas mit den Zahlen die durch die Ziffern bezeichnet werden

Bei der Definition von A-Zahlen die Zahlen 1,2,3 gehören → Zahlen von Symbolen, jede Y-Zahl =auch eine A-Zahl, aber es muss aus irgendeinen A-Zahlen wieder eine A-Zahl entstehen, wenn ich wieder eine A-Zahl anhänge,

deswegen lautet **die arithmetische Definition der A-Zahl:**

- Jede Y-Zahl ist eine A-Zahl.
- Für alle x: wenn x eine A-Zahl ist, dann ist auch $10x+1$, $10x+2$ und $10x+3$ eine A-Zahl.
- Nichts sonst ist eine A-Zahl.

Aneinanderhängen von Ziffern bedeutet wenn man von Zahlen spricht, dann muss man berücksichtigen, dass das aneinanderhängen eine bestimmte Operation mit Zahlen bedeutet. → Multiplikation mit 10 +1,2,3... dieser Begriff ist umfangsgleich mit dem Begriff „GZ eines Satzes“.

„MIU ist ein Satz“ → „1,2,3 ist die Gödel Zahl eines Satzes“ → „1,2,3 ist eine A-Zahl“

„MI ist ein Theorem“

Metamathematischer Satz: „MI ist ein Theorem“

Arithmetisierung: Gödel Zahl von MI ist 12 → „12 ist die GZ eines Theorems“ → „12 ist eine T-Zahl“

Definition T-Zahl:

- 12 ist eine T-Zahl → weil MI ein Axiom u damit ein Theorem ist.
- Wenn x eine T-Zahl ist, dann ist auch $10x+3$ eine T-Zahl. (=123/MIU ist eine T-Zahl)
- ... (siehe nächste VO!)
- Wenn $100x+33$ eine T-Zahl ist, dann ist auch x eine T-Zahl.(MIUU (=100x12+33) → MI)

Es ist wichtig zu verstehen welches Verhältnis zwischen metamathematischen Sätzen und Sätzen in formalen arithmetischen Systemen besteht:

Durch die Arithmetisierung der formalen Sätze bekommt man arithmetische Metamathematische Sätze (die mit arithmetischen Regeln umfangsgleich wie die formalen Sätze mit ihren Ableitungsregeln sind).

Dadurch kann man dann in weiterer Folge mittels dieser arithmetischen Regeln auf Sätze schließen, die von den formalen Ableitungsregeln nicht herleitbar sind.

Diagonalisierung

(--- hier fehlt eine Vorlesung ---)

Abkürzung:

$[n,m]$: Der formale Satz, der aus der Formel mit der Gödelzahl n dadurch hervorgeht, dass für die Variable mit der Gödelzahl m die Ziffer für n eingesetzt wird

Metamathematischer Satz: Der formale Satz " $0 = 1 (=0)$ " ist kein Theorem.

Man kann auch eine Kennzeichnung für den obigen Satz verwenden zB der formale Satz der aus $x=1$ dadurch hervorgeht dass man für x die ziffer 0 einsetzt ist kein Theorem.

oder andere kennzeichnung: jede formel eines arithm. Systems hat eine Gödelzahl (Gödelisierung) zB für obigen Satz " g_1 ", und x hat zb die Gödelzahl " g_2 "

jedes zeichen und jede formel hat eine gödelzahl

zusammengefasst: (gleiche aussage wie oben)

Der Formale Satz der aus der Formel mit der Gödelzahl g_1 dadurch hervorgeht, dass für die Variable mit der Gödelzahl g_2 die Ziffer für die Zahl 0 eingesetzt wird ist kein Theorem.

der erste satz nennt den satz direkt, die zweite aussage kennzeichnet den satz durch gödelisierung (isomorph)

weiterer satz:

Der Formale Satz der aus der Formel mit der Gödelzahl g_1 dadurch hervorgeht, dass für die Variable mit der Gödelzahl g_2 die Ziffer für g_1 eingesetzt wird ist kein Theorem.

$[g_1, g_2]$ ist kein Theorem

metamathematische sätze sind in formalen Systemen repräsentierbar (wir wissen jedoch nicht wie dieser jetzt konkret aussieht) zB durch Satz $\varphi(g_1, g_2)$ repräsentiert den metamathematischen satz.

der vollständigkeit halber muss man auch den einsetzungs-begriff bzw der gebundenheit und ungebundenheit von variablen arithmetisieren.

weiter:

$\varphi(x, g_2)$ allgemein Version zu Obiger (gödelisierungs

– equivalent) Formel (wenn man für x g_1 einsetzt bekommt man die obige aussage)

Diese Formel hat auch eine Gödelzahl g_3

Ziffer des Satzes in sich selber eingesetzt:

$\varphi(g_3, g_2)$

dieser Satz repräsentiert im Formalen Arithmetischen System: $[g_3, g_2]$ ist kein Theorem.

das ist der gödelsatz

es gibt viele gödelsätze. aber einer reicht aus um den Beweis zu führen.

wenn $\varphi(g_3, g_2)$ ist wahr, dann $\varphi(g_3, g_2)$ ist kein Theorem.

Annahme: $\varphi(g_3, g_2)$ ist wahr

" $[g_3, g_2]$ ist kein Theorem" ist auch wahr

$[g_3, g_2]$ ist kein Theorem

$[g_3, g_2] = \varphi(g_3, g_2)$

$\varphi(g_3, g_2)$ ist kein Theorem

Klassisches Beispiel für Axiomatische Methoden: Geometrie (Euklid'sche Geometrie)

früher in ägypten: unkoordinierte sammlung von sätzen

Euklid hat daraus einige ausgesucht und darauß Axiome erstellt (aus denen alle anderen dann logisch abgeleitet werden können)

Hilbert: widerspruchsfreiheit der axiome beweisen: dafür muss man "einfache" (finite schlussformen) und unumstrittene formulierungen verwenden.

- **Wenn g ein Theorem des Systems ist dann ist g in diesem System formal unentscheidbar wenn das System konsistent ist.**

Annahme für die Erklärung:

Das System muss WAHR sein (Alle Theoreme sind "wahre" Sätze).

Dies macht die Erklärung einfacher. Um zu beweisen das der Gödelsatz auch gilt wenn das System "nur" konsistent ist, ist viel mehr Beweisarbeit nötig (Gödel verwendet in seinem Aufsatz sogar eine sogenannte "Omega-Konsistenz" - später wurde bewießen dass "einfach Konsistenz" auch ausreicht ($\varphi, \neg\varphi$ darf es nicht geben)).

Beweis (Für alle Systeme mit arithmetischer Interpretation):

(Konklusion aus dem ersten Satz: g ist wahr genau dann wenn g kein Theorem ist)

* (1) System ist wahr

Zeige: g ist kein Theorem

* (2) g ist ein Theorem (Annahme für indirekten Beweis)

(3) g ist wahr (1, 2)

(4) g ist kein Theorem (3, g) Widerspruch(2,4)

(5) g ist kein Theorem (2 – 4, indirekter Beweis)

Zeige: $\neg g$ ist kein Theorem

(6) g ist wahr (5, g) (7) $\neg g$ ist falsch (6)

(8) $\neg g$ ist kein Theorem (1, 7)

auf (5) und (8) folgt: g ist weder beweisbar, noch widerlegbar $\Rightarrow g$ ist formal unentscheidbar.

q.e.d.

Zweites Unvollständigkeitstheorem

Nur kurze Ausführung, weil die meisten Leute dieses auch ohne große Erklärungen den Beweis verstehen würden und weil der 2. Beweis den 1. Beweis auf gewisse Weise fortsetzt.

Es behandelt wie das erste um konsistente formale, arithmetische Systeme.

Konsistenz

Begriff der „Konsistenz“ – System muss widerspruchsfrei sein. Gödel selbst spricht von einer besonderen Art der Widerspruchsfreiheit: „Omega-Konsistenz“;

1936 von John Barkley Rosser das Gödelsche Unvollständigkeitstheorem auch dann gilt, wenn man nicht die Omega-Konsistenz sondern auch für die „simple consistency“ gilt.

Einfach konsistent genau dann, wenn es keinen Satz gibt: φ ist ein Theorem und $\neg\varphi$ ist ein Theorem = wäre formal inkonsistent. (Keinen Satz der ein Theorem ist u die Negation wäre auch ein Theorem).

$$\neg x = x \rightarrow \text{GZ: } g4. \neg 0''' = 0'''$$

Weil Theoreme $0=0, 0'=0', \dots 0''''=0''''$; weil ansonsten inkonsistent. Bzw. umgekehrt.

Wenn ein System einfach inkonsistent ist \rightarrow dann ist jeder Satz ein Theorem (weil jeder beliebige Satz aus einem widersprüchlichen System folgt)

Fazit: Das formale arithmetische System ist konsistent gdw " $\neg 0'''' = 0''''$ " **kein Theorem ist.** = metamathematischer Satz \rightarrow Umformulierung bzw. Kürzel $[n,m]$ (siehe letzte Vorlesung).

Das formale arithmetische System ist konsistent gdw $[g4, g2]$ ist kein Theorem.

G2 = x (siehe letzte VO)

\rightarrow Logik 1: Wenn in einem System φ ist ein Theorem und $\neg\varphi$ dann von φ auf andere Formeln schließen zB $(\varphi \wedge \omega)$ disjunktiver Syllogismus \rightarrow von einer Disjunktionsteil φ auf das andere schließen.

$[g3, g2]$ ist kein Theorem. = Gödelsatz, der im System nicht beweisbar ist. Wahr wenn er kein Theorem ist.

- Aus einer Formel $\varphi(x, g2)$ die Ziffer für $g3$ eingesetzt wurde.

$[x, g2]$ ist kein Theorem repräsentiert $\rightarrow \varphi(x, g2)$ ist wahr.

Dann repräsentiert $\varphi(g4, g2) \rightarrow [g4, g2]$ ist kein Theorem. = sind gödelisierungsäquivalent. (wenn ein arithmetischer Satz einen metamathematische Satz repräsentiert sind beide äquivalent)

Der arithmetische Satz $\varphi(g4, g2)$ lässt sich nicht beweisen \rightarrow ist kein Theorem, d.h. für Gödel, dass es nicht beweisbar ist, dass das System konsistent ist! Ist wahr gdw. Das System konsistent ist.

$\varphi(g4, g2) \rightarrow$ ist kein Theorem des Systems (und nicht beweisbar) \rightarrow man kann zeigen, dass in jedem formalen arithm. System folgendes ein Theorem ist: $\varphi(g4, g2) \rightarrow \varphi(g3, g2)$; dann kann man sehen, dass $\varphi(g4, g2)$ kein Theorem ist \rightarrow weil wenn das ein Theorem wäre, nachdem auch die Subjunktion (oben) ein Theorem ist, dann könnte man aus der Subjunktion u ihrem Vorderglied auf das Nachglied schließen, dann müssten, wenn das Vorderglied der Subjunktion dann müsste auch der Gödelsatz ein Theorem sein! Der GS ist aber kein Theorem, deswegen kann $\varphi(g4, g2)$ auch kein Theorem sein.

Weil GS nicht beweisbar ist, kann $\varphi (g4, g2)$ auch nicht bewiesen werden.

Zweites Gödelsches Unvollständigkeitstheorem: Wenn das System konsistent ist, dann gibt es keinen Beweis für diese Konsistenz.

Bedeutsamkeit der beiden Unvollständigkeitstheoreme

steht im Zusammenhang mit dem Hilbertschen Programm \rightarrow in Punkten Widerspruchsfreiheit – nicht realisierbar aufgrund der Gödelschen Unvollständigkeitstheoreme – bei formal arithm. System keine vollständige Axiomatisierung (wenn das System konsistent ist \rightarrow 1.Gödelsche

Unvollständigkeitstheorem: GS die man weder beweisen noch widerlegen kann, φ , $\neg\varphi$ – einer von beiden beweisbar sein, unvollständig – nicht alles was wahr ist auf Axiome rückführbar. Entweder widersprüchlich oder unvollständig. 2.Gödelsche Unvollständigkeitstheorem (diskussion über interpretation) – möglich u. best. Umständen zu zeigen, dass ein formales System widerspruchsfrei ist, aber dazu braucht man Regeln, die stärker sind als das System sie bereitstellt –die Widerspruchsfreiheit kein nicht innerhalb des Systems bewiesen werden (nicht einen arithmetischen Satz beweisen, der gdw wenn das System konsistent ist).

Gödel selbst – optimistisch, wenn die Widerspruchsfreiheit nicht mit Mitteln des Systems bewiesen werden kann, nicht grundsätzlich ausschließen, dass es finite Methoden gibt \rightarrow aber diese stellt nicht das System bereit. Mit diesen könnte man vll doch die Widerspruchsfreiheit beweisen. Aber was könnten das für Methoden sein?

Weiterführende Literatur

- Ernest Nagel, John R. Newman - Gödels Proof (mit einigen Lücken, aber leicht lesbar);
- Douglas R. Hofstadter: Gödel Escher Bach
- Raymond Smullyan - Gödel's Incompleteness Theorems