ELEMENTARE LOGIK I

1. Vorlesung: 04.10.2010

Was ist Logik?

Alltagsgebrauch:
oft wird „logisch“ im Sinn von unmittelbar einsichtig verwendet oder auch in Zusammenhang mit kausalen Wirkungsweisen („wenn du das und das machst, ist es nur logisch, dass das und das passiert“)

„unlogisch“ verwendet man im Alltag meist, um den Gesprächspartner zu entwaffnen („das ist total unlogisch, was du da sagst!“) :

Die Form der Logik, um die es in dieser LV geht, ist mit der alltäglichen verwandt, aber dennoch nicht gleich!

-> Formale Logik:

Gründer: Aristoteles. Bis ins 19. Jhdt. war Logik (als traditionelle formale Logik) eher eine Hilfswissenschaft (fand aber keinen ausschlaggebenden Gebrauch in der Mathematik , da diese mit der Zeit immer theoretischer/abstrakter wurde).
Anfang des 20 Jhdt. kommt es zur Reformation: Die bedeutendsten Mathematiker versuchten die Logik auf ein gewisses Niveau zu heben. Es kommt zur Grundlagenkrise, die schließlich in der Modernen Logik/Neuen Logik endet.

Die Formale Logik teilt sich in 1) traditionelle formale Logik (4 Jhdt.-1956) und
2) moderne formale Logik(1850-heute)

Moderne formale Logik teilt sich wiederum in Philosophische Logik und Nicht-philosophische Logik. Letzteres behandeln wir.

Die Elementare Logik (nicht-phil. Logik) ist die Grundlage für die Phil. Logik! Sie beschäftigt sich mit Problemen (Argumenten). Argumente werden benutzt, um eine These zu begründen, sie müssen dabei aber nicht immer erfolgreich sein.

Das Argument besteht aus:

1) genau einem Aussagesatz, der zu begründenden These (die „ Konklusion“ des Arguments)

2) einem oder mehreren Aussagesätzen, aus denen die Konklusion folgen soll (die „Prämissen“)

3) einem Argumentationsindikator: dabei zu unterscheiden zwischen Konklusionsindikator und Prämissenindikator.

Konlusionsindik.: z.B. daher, Ergo, folglich, also….(wir einigen uns auf ERGO)
Prämissenindik.: weil, schließlich etc.

Standardform von Argumenten:

Alle Prämissen sind in Reihenfolge angeführt und nummeriert. Ein Konklusionsindikator (bei uns ERGO) ist gegeben.

Beispiel:

1) Alle Menschen sind sterblich.
2) Sokrates ist Mensch.
Ergo gilt: Sokrates ist Sterblich.

1) und 2) sind Prämissen, die Satz nach dem „Ergo gilt“ die Konklusion.

Bei der Prämisse muss es sich um einen Aussagesatz handeln, also darf die Prämisse keinen Befehl, Wunsch etc. ausdrücken!!!

z.B.:

Bring meine Koffer herein.
Dieser Koffer gehört zu meinen.
Ergo: Diesen Koffer bringst du hinein.

Die erste Prämisse ist ein Befehl, daher ist es kein Argument!! Ein Argument kann viele Eigenschaften haben, die Logik interessiert dabei aber nur eines….

Die formale Korrektheit!

2. VO am 11.10.10

Argumente stützen die Konklusion gut oder weniger gut. Die Wahrheit der einzelnen Prämissen allein gibt uns aber keinen Aufschluss über die Qualität. Denn eine Prämisse muss zusammenhängend und gewichtig sein um die Konklusion stützen zu können. Ist sie es nicht, hilft uns nicht einmal die Wahrheit des Satzes.

zB: 1) Graz ist Landeshauptstadt.
2) Sokrates war Philosoph.
Ergo gilt: Gestern war Sonntag.

Alle drei Sätze sind die Wahrheit, aber die Prämissen stützen die Konklusion in keinem Fall. Natürlich kann auch der Fall eintreten, dass die Prämissen zwar der Wahrheit entsprechen, aber die Konklusion falsch ist. Diesen speziellen Fall nennen wir, um nicht Fachtermini benützen zu müssen, den "Bösen Fall" ☺

zB: Graz ist Landeshauptstadt
Sokrates ist Philosoph
Ergo gilt: Schweine können fliegen ☺

Die Prämissen sind wahr, aber sie stützen weder die Konklusion, noch kann man einen Wahrheitsgehalt ermitteln.

Deduktive Korrektheit: Ein Argument A ist deduktiv korrekt, genau dann, wenn es prinzipiell unmöglich ist, dass alle Prämissen von A wahr sind und zugleich die Konklusion von A falsch ist.

Den Logiker interessiert es dabei nicht, die Wahrheit der Prämissen zu überprüfen. Für ihn ist allein interessant, zu überprüfen, ob ein Argument deduktiv korrekt ist, also ob es – sofern die Prämissen wahr sind – unmöglich ist, dass die Konklusion falsch ist. Den Logiker interessiert nur die formale Korrektheit.
Es gilt: Ist die Konklusion falsch, muss mindestens eine der Prämissen falsch sein. Die formale Korrektheit ist eine strengere Form der deduktiven Korrektheit. Formal korrekt ist immer auch deduktiv korrekt, aber nicht umgekehrt.
Nun kann man sagen:

Argumente

Deduktiv korrekte Argumente -> formal korrekte Argumente oder -> analytisch korrekte Argumente	deduktiv inkorrekte Argumente

Prinzipielle Unmöglichkeit: "Es gibt verheiratete Junggesellen."
Dieser Satz heißt soviel wie "Es gibt verheiratete Männer, die nicht verheiratet sind".
Hier spricht man von einem Widerspruch in sich, einer sogenannten "contradictio in adiecto"

Man kann also zwischen formal korrekten und analytisch korrekten Argumenten unterscheiden. Hier 2 Beispiele, die das verdeutlichen.

Bsp. 1) 1) Hans ist Junggeselle.
Ergo gilt: Hans ist unverheiratet.

analytisch korrekt durch die Definition des Wortes Junggeselle.

Bsp. 2) 1) Hans ist Junggeselle.
2) Alle Junggesellen sind unverheiratet.
Ergo gilt: Hans ist unverheiratet.

Deduktiv wie formal korrekt!

Bei der analytischen Korrektheit muss ich mir über die Bedeutung des Wortes Junggeselle klar sein. Bei der formalen Korrektheit nicht. Hier sind die Worte Hans, Junggeselle und unverheiratet irrelevant. Ich könnte sie genausogut durch Buchstaben ersetzen.
Hans = a
Junggeselle = B
unverheiratet = C

1) a = B
2) Alle B sind C
Ergo gilt: a = C

Dieses Satzgerippe ist kein Argument mehr, da es sich hierbei um keine Aussagesätze mehr handelt. Es ist lediglich eine Argumentform. Die Buchstaben sind mehr oder weniger Leerstellen.

3.Vo 18.10.10

Eine Argumentform entsteht durch Ersetzen der Inhalte durch Buchstaben wie a, B, C. Sie sind aber keine Abkürzungen sondern Platzhalter für beliebige inhaltliche singuläre Terme. A, C sind generelle Terme (steht für die Eigenschaft, ein Mensch, Junggeselle etc. zu sein) und a ein singulärer Term (kann z.B. für Hans, Josef, den Bundespräsidenten, der Henker etc. stehen).

→ es muss aber eine uniforme Ersetzung sein:
Jeder der zu ersetzenden Inhalte muss immer durch den gleichen Buchstaben ersetzt werden. Wir können also nicht in der Prämisse a für Hans nehmen und in der Konklusion y für Hans einsetzen. Die Ersetzung muss uniform bleiben.

Natürlich kann man die Platzhalter beliebig verändern.
z.B. a= Wien
B= Millionenstadt
C= hohe Kriminalitätsrate

➔ 1) Wien ist eine Millionenstadt
2) Millionenstädte haben eine hohe Kriminalitätsrate
Ergo gilt: Wien hat eine hohe Kriminalitätsrate.

Grammatikalische Änderungen werden in Kauf genommen.

Die Argumentform kann also beliebig vielen und sehr unterschiedlichen Argumenten dienen, wichtig ist nur, dass die Ersetzung uniform bleibt.

Definition: „Eine Argumentform ist logisch gültig genau dann wenn alle Argumente (mit) dieser Form deduktiv korrekt sind.“

Gäbe es also ein Argument, welches mit dieser Form falsch wäre, wäre sie ungültig. Gibt es aber nicht ☺

Zum analytisch korrekten Beispielen:
1) Hans ist Junggeselle.
Ergo gilt: Hans ist unverheiratet.

Die Argumentform zu diesem Beispiel wäre→
a ist ein B.
Ergo gilt: a ist C.

Diese Satzgerippe besitzt keine logische Gültigkeit weil wenn für a= Hans, B= Junggeselle und C=Liebhaber klassischer Musik gilt, dieses Argument nicht folgerichtig, also logisch gültig ist.

Natürlich kann ich in einem Argument auch Beziehungen, also Relationen zwischen 2 Dingen erörtern. → „aRb“ = a steht in Relation zu b.

1) Österreich grenzt an Deutschland.
   Ergo gilt: Deutschland grenzt an Österreich.

 Daraus folgt→ 1) aRb
Ergo gilt: bRa

Diese Form ist zwar deduktiv korrekt, aber besitzt ebenfalls keine logische Gültigkeit weil wenn für a= Peter, b= Maria und R= liebt gilt, ist der Böse Fall möglich.
→ Peter liebt Maria
Ergo gilt: Maria liebt Peter.
Das ist nicht zwingend notwendig, diese Liebe könnte ja durchaus einseitig sein. ☺

Nächstes Beispiel:

1) Entweder ist der Gärtner der Mörder oder der Butler.
2) Es ist nicht der Fall, dass der Gärtner der Mörder ist.

Ergo gilt: Der Butler ist der Mörder.

→ P=der Gärtner ist der Mörder.
Q= Der Buttler ist der Mörder.

1) Entweder P oder Q.
2) Es ist nicht der Fall dass P.
Ergo gilt: Q.
Dies ist logisch gültig weil man auch durch ändern der Inhalte noch das selbe Resultat bekommt.
z.B. P= Es gibt Wienerschnitzel.
Q= Es gibt Schweinsbraten.

1) Entweder P oder Q.
2) Es ist nicht der Fall das P
Ergo gilt: Q.
Hier ist auch nach dem Ersetzen der vorherigen Inhalte klar erkennbar, dass es heute Schweinsbraten geben wird ☺
Man muss sich jedoch entscheiden, was genau man ersetzt. Ich könnte zum Beispiel auch vollständige Sätze ersetzen. Man tut aber gut daran, möglichst fein zu ersetzen. Ein fein aufgegliederte logisch gültige Form impliziert nicht, dass auch die grobe Version gültig ist. Umgekehrt schon. Jedes Argument besitzt also mehrere Formen, welche im Endeffekt entsteht hängt davon ab, was und wie ich etwas ersetze.

Definition: „Ein Argument A ist formal korrekt (=logisch gültig, folgerichtig, gültig) genau dann wenn A mindestens eine logisch gültige Argumentform hat.“

Es gibt also viele verschiedene Formen für das Argument A,, aber nur eine davon muss stimmen. Ein Beispiel für logische Ungültigkeit.

→ 1) P
2) Q
Ergo gilt: R

Ich könnte jetzt sagen:
1) Graz ist Bundeshauptstadt der Steiermark.
2) Wien ist Hauptstadt von Österreich.
Ergo gilt: Graz liegt in der Türkei.

Definition: „Ein Argument A ist analytisch korrekt genau dann wenn A deduktiv korrekt ist, aber nicht formal korrekt."

a ist ein Junggeselle.
Ergo gilt: a ist unverheiratet.

Ist das jetzt ein Argument oder ein Argumentform? Nein, dieses Gebilde ist keine Argumentform, wäre es eine, wäre sie logisch gültig.

In jedem besprochenen Beispiel finden wir logische Wörter= neutrale Wörter= Formwörter Die Bezeichnung Formwort ist passend weil es sich um Wörter handelt, die in der Argumentform vorkommen können.
→ Das können sein: es ist nicht der Fall dass, und, entweder oder, nur, alle, jede, jeder, alle sind, ist ein, Einige sind, etc. → Formwörter sind also Wörter, die keinen Bezug auf die inhaltlichen Termini(Hans, Junggeselle etc.) nehmen.

Logische Unmöglichkeit: „Es ist genau dann *logisch unmöglich*, dass …, wenn die Annahme, dass …widersprüchlich ist und zwar völlig *unabhängig* von den Bedeutungen irgendwelcher Wörter oder Wortverbindungen, die *keine Formwörter* sind." (Kamitz 2007, 228).

So ist es z.B. logisch unmöglich, dass jemand der Bundespräsident ist und zugleich nicht der Bundespräsident ist (wobei man hier „Bundespräsident" durch jedes andere Nomen ersetzen kann und trotzdem noch eine logische Unmöglichkeit vorliegt, z.B. ist es ebenso logisch unmöglich, dass jemand mein Gärtner ist und zugleich nicht mein Gärtner ist.).

4. Vo 25.10.10 Vortragender Matzer

4 Argumente werden vorgestellt, je eine Prämisse, die bei allen vier Beispielen gleich bleibt.

Prämisse: 1) Es herrscht keine Vollbeschäftigung, außer die Wirtschaft wächst. (Nicht V außer W)

Es gilt: V= Es herrscht Vollbeschäftigung. W= Die Wirtschaft wächst.

Argument 1) 1) Nicht V außer W.
Ergo gilt: Wenn W dann V

Argument 2) 1) Nicht V außer W.
Ergo gilt: Wenn V dann W.

Argument 3) 1) Nicht V außer W.
Ergo gilt: Wenn nicht V dann nicht W.

Argument 4) 1) Nicht V außer W.
Ergo gilt: Wenn nicht W dann nicht V.

Alle vier Argumente sind formal korrekt, also logisch gültig. Vollbeschäftigung und Wirtschaftswachstum treten immer gemeinsam auf, das können wir aus dem Wort „außer" in der Prämisse (Nicht V *außer* W) schließen.

Wir werden im Laufe der VO eine Methode lernen, um genau so etwas feststellen zu können. Dabei beschäftigen wir uns auch mit der Bedeutung einzelner Wörter, wie in unserem Beispiel „außer". Wir wollen in den meisten Fällen zu einer glasklaren Entscheidung kommen.

Das „Logiksystem": Wir verwenden eine Kunstsprache und wenden diese dann auf die normale deutsche Sprache an. Zu diesem Zweck werden wir diverse Zeichen erlernen und verstehen, wie diese zu kombinieren sind.

Das Logiksystem besteht aus:
→ Syntax: Lehre oder Gestalt der Zeichen.
→ Semantik: Lehre der Bedeutung
→ Kalkül: Verfahren zur Feststellung semantischer Eigenschaften in der formalen Zeichenreihe.

Lexikon (Zeichenvorrat)
1)Satzbuchstaben: Wir verwenden lateinische Großbuchstaben (A, B, C, …, Z) Daraus folgt, dass wir 26 mögliche Zeichen zu Verfügung haben, reichen diese nicht aus, werden A_1, B_1 etc. hinzugezogen. Nun gibt es unendlich viele Möglichkeiten.

2) 5 Junktoren:
„¬“ heißt Negator. Gelesen „non“, bei uns „Es ist nicht der Fall dass…“

„Λ“ heißt Konjunktor. Gelesen „et“, bei uns „und“ (ohne zeitliche Nebenbedeutung, also einer Reihung entsprechend).

„v“ heißt Disjunktor. Gelesen „vel“, bei uns „oder“ (das Eine oder das Andere)

„-->“ heißt Subjunktor. Gelesen „Pfeil“, bei uns „Wenn..dann..“
[Anmerkung: ich werde bei Argumenten --> schreiben und nicht → da ich → in meiner Mitschrift missbrauche☺)
„↔“ heißt Bisubjunktor. Gelesen „Doppelpfeil, bei uns „Genau dann wenn“

3) 2 Gliederungszeichen
„(“ = „Klammer auf“
„)“ = „Klammer zu“

Diese Zeichen stellen unseren Vorrat dar. Nun müssen wir noch klären, wie wir diese Zeichen kombinieren dürfen.
Unsere Sätze werden immer Formeln sein, daher

Formelbildungsregeln:

1) Jeder Satzbuchstabe ist eine Formel. („atomare Formel“ genannt weil es die kürzeste Form ist).

3) a) wenn φ eine Formel ist, so auch φ mit ¬ davor
→ die Negation von φ

b) wenn φ und ψ Formeln sind, so auch **(**φΛψ**)**.
→ Konjunktion von φ und ψ
[die Klammern setzen wir, außer bei der Negation, immer dazu, wird später einfacher.]

c) wenn φ und ψ Formeln sind, so auch (φvψ).
→ Disjunktion (von φ und ψ)

Bsp.:
L=Heute ist Montag.
M=Heute ist Mittwoch.
(L v M) =Heute ist Montag oder Mittwoch.

d) wenn φ und ψ Formeln sind, so auch (φ --> ψ).
→ Subjunktion (mit dem Vorderglied φ und dem Nachglied ψ) Hier ist die Reihenfolge *nicht* egal. Vorderglied= Antecedens ; Nachglied=Sukcedens

Bsp.:
L= Heute ist Montag.
P= Heute findet eine Logikveranstaltung statt.
(L-->P) = Wenn heute Montag ist, findet heute eine Logikveranstaltung statt.

e) wenn φ und ψ Formeln sind, so auch ($\varphi \leftrightarrow \psi$).
→ Bisubjunktion (von φ und ψ)

((L-->P) ↔ F) ist eine Bisubjunktion.
[Könnte z.B. heißen (wenn F = Heute ist kein Feiertag.):
Wenn heute Montag ist, dann findet eine Logikveranstaltung statt, genau dann, wenn heute kein Feiertag ist.]

3) Sonst ist Nichts eine Formel.

Alles unter 2) nennt man „molekulare Formel“.

Bsp. (A v B v C) ist keine Formel. → ((A v B) v C) wäre eine.
(¬A) ist keine Formel. → ¬A wäre eine. Wie oben erwähnt setzt man bei der Negation keine Klammern.

5 Vo. 08.11.10

Negationen haben immer ein Glied: „¬P“ Hier wäre P das Glied.
Subkonjunktionen, Disjunktionen etc. (molekulare Sätze) haben immer genau 2 Glieder.

Bsp.1) ¬ (P∧¬Q) → Ist eine Negation, und ihr Glied ist „(P∧¬Q)“

Bsp.2) ((P∧Q) --> (RvQ)) → Ist eine Subjunktion! Hat demzufolge 2 Glieder, (P∧Q) ist das Vorderglied und (RvQ) ist das Nachglied.

Bsp.3) ((P-->S) v (¬P∧Q)) → Ist eine Disjunktion! Wiederum 2 Glieder (gleich wie Bsp.2)

Daraus folgt, dass bei einer Negation der Negator der Hauptjunktor ist, und zwar immer an der ersten Stelle! Bei Bsp.1 ist der Negator an erster Stelle der Hauptjunktor, der Negator an der hinteren Position nicht.
Subjunktoren (Disjunktoren etc.) sind genau dann Hauptjunktoren, wenn sie zwischen den 2 Gliedern stehen. Siehe Bsp. 2 bzw. Bsp. 3.

Semantik im aussagelogischen System: „J“ ist der Name dieses Systems, das wir gerade lernen.

Wir werden uns mit folgenden semantischen Begriffen und ihren Zusammenhängen beschäftigen:

1) Bewertung von J
2) Wahrheit bzw. Falschheit von J-Sätzen bei einer bestimmten Bewertung
3) Tautologie
4) Kontradiktion
5) aussagelogische Äquivalenz
6) kontradiktorische Gegensätze
7) Erfüllbarkeit und Unerfüllbarkeit von Satzmengen
8) Gültigkeit einer J-Sequenz

Zu (1)
Es gibt 2 Werte: 1 und 0. Die Bedeutung dieser Werte ist im Prinzip irrelevant, wir könnten also sagen 1=rot und 0=blau. Da wir später aber nicht drum herum kommen für 0= falsch und 1=wahr anzunehmen, machen wir es jetzt ebenso.

→ 0=falsch und 1=wahr

Def: „Eine Bewertung B ordnet jedem Satz unserer formalen Sprache genau einen von den beiden Werten 1 und 0 zu, wobei die folgenden 5 Bedingungen erfüllt sein müssen:“

(1) Eine Negation ¬φ ist bei der Bewertung B wahr g.d.w. (genau dann, wenn) φ bei B falsch ist.
Wahrheitstafel:

φ	**¬φ**
1	0
0	1

Daraus folgt, dass eine Negation den Wahrheitswert umdreht. Ist das Glied wahr, ist die Negation falsch, ist das Glied aber falsch, so ist die Negation wahr.

(2) Eine Konjunktion (φΛψ) ist wahr bei B g.d.w. φ wahr ist bei B und ψ wahr ist bei B.

Wahrheitstafel:

φ	**ψ**	**(φΛψ)**
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Bei einer Konjunktion müssen beide Glieder wahr sein, damit die Konjunktion wahr ist. Sobald eines der Glieder falsch ist, ist die gesamte Konjunktion falsch.

(3) Eine Disjunktion (φ v ψ) ist wahr bei B g.d.w. φ und/oder ψ wahr ist bei B.

Wahrheitstafel:

φ ψ	**(φ v ψ)**
1 1	1
1 0	1
0 1	1
0 0	0

Daran sieht man, dass es für die Wahrheit der Disjunktion ausreichend ist, wenn mindestens ein Glied wahr ist.

(4) Eine Subjunktion (φ --> ψ) ist wahr bei B g.d.w. φ falsch ist bei B und /oder ψ wahr ist bei B.

Wahrheitstafel:

φ ψ	(φ --> ψ)
1 1	1
1 0	0
0 1	1
0 0	1

Daraus folgt, dass die Subjunktion nur falsch ist, wenn der Antecedens wahr und zugleich der Sukcedens falsch ist. Die Subjunktion ist in folgenden Fällen wahr:
Das Vorderglied ist falsch und das Nachglied ist wahr.
Das Vorderglied ist falsch und das Nachglied ist falsch.
Das Vorderglied ist wahr und das Nachglied ist wahr.

(5) Eine Bisubjunktion (φ ↔ ψ) ist wahr bei B. g.d.w. φ und ψ den gleichen Wahrheitswert bei B. haben.

Wahrheitstafel:

φ ψ	(φ ↔ ψ)
1 1	1
1 0	0
0 1	0
0 0	1

Die Bisubjunktion ist wahr, wenn entweder beide Glieder falsch oder beide Glieder wahr sind.

Für uns gilt nun, dass ein Satz nicht einfach nur wahr oder falsch ist, sondern er ist wahr oder falsch bei <u>einer bestimmten</u> Bewertung.

Bsp.1) ((P --> Q) v (Q Λ R)) Wir nehmen an, dass alle atomaren Einheiten 1 sind!
1 <u>1</u> 1 <u>1</u> 1 <u>1</u> 1 Die unterstrichenen 1er sind von uns hinzugefügt. Wir erkennen also, dass die Subjunktion mit 2 wahren Gliedern auch wahr ist, und dass die Konjunktion mit 2 wahren Gliedern auch wahr ist. Der Hauptjunktor, die Disjunktion, ist ebenfalls wahr, weil eine Disjunktion mit 2 wahren Gliedern (in diesem Fall sind die Glieder (P --> Q) sowie (Q Λ R)) wahr ist.

Bsp.2) ((P --> Q) v (Q Λ R)) Wir nehmen an, dass bei unserer Bewertung P=1, Q=0 und R=0.
1 <u>0</u> 0 <u>0</u> 0 <u>0</u> 0 Daraus folgt, dass der Satz falsch ist.

Weiter muss man sagen, dass die Bewertung der einzelnen Komponenten nicht immer bestimmend für den Wahrheitswert des ganzen Satzes sein muss.

Bsp.4: (Pv¬P) Nehme ich für P=1 ist die Aussage wahr, nehme ich P=0 ist sie ebenfalls wahr.

Ansicht in der Wahrheitstafel:

P	**(P v ¬ P)**
0	0 **1** 1 0
1	1 **1** 0 1

→ Ob für P=0 oder 1 ist egal, immer wahr! → Tautologie!

Def. : „Ein Satz φ ist eine **Tautologie** g.d.w. φ bei jeder Bewertung wahr ist. (bzw. den Wert 1 hat)“

Bsp.5) ((P Λ¬ P) --> Q)

Lösen mit Wahrheitstafel:

P Q	((P Λ¬ P) --> Q)
1 1	1 0 0 1 **1** 1
1 0	1 0 0 1 **1** 0
0 1	0 0 1 0 **1** 1
0 0	0 0 1 0 **1** 0

Egal welche Bewertung, Hauptjunktor ist immer wahr → Tautologie!

Vo. 15.11.2010

Bei Tautologien können auch mehr als nur 2 Platzhalter vorkommen, spielt aber keine Rolle, denn sie werden nach dem gleichen Prinzip aufgelöst.

Bsp.
(((P --> Q) Λ (Q --> R) --> (P --> R))

Wahrheitstafel:

P Q R	**(((P --> Q) Λ (Q --> R) --> (P --> R))**
1 1 1	1 1 1 1 1 1 1 **1** 1 1 1
1 1 0	1 1 1 0 1 0 0 **1** 1 0 0
1 0 1	1 0 0 0 0 1 1 **1** 1 1 1
1 0 0	1 0 0 0 0 1 0 **1** 1 0 0
0 1 1	0 1 1 1 1 1 1 **1** 0 1 1
0 1 0	0 1 1 1 1 1 1 **1** 0 1 1
0 0 1	0 1 0 1 0 1 1 **1** 0 1 1
0 0 0	0 1 0 1 0 1 0 **1** 0 1 0

Daraus folgt, dass es sich hier um eine Tautologie handelt! Natürlich wird dieses System der Überprüfung (die Wahrheitstafel) mit steigender Anzahl von Platzhaltern immer umständlicher. Später lernen wir ein neues System kennen. Derweil reicht dieses vollkommen aus.

Tautologien sind also Sätze, die bei jeder Bewertung wahr sind. Davon gibt es unendlich viele. Es gibt aber ebenso unendlich viele Sätze, die bei jeder Beurteilung negativ sind.

Def.: „Ein Satz φ ist eine **Kontradiktion** g.d.w. φ bei jeder Bewertung falsch ist.“ (oder den Wert 0 hat)

Es gilt, dass Tautologien, die negiert werden, Kontradiktionen sind.
z.B. →

P	**¬ (P --> P)**
1	**0** 1 *1* 1
0	**0** 1 *1* 1

Oder das Beispiel von vorher:

P Q R	**¬ (((P --> Q) Λ (Q --> R) --> (P --> R))**
1 1 1	**0** 1 1 1 1 1 1 1 **1** 1 1 1
1 1 0	**0** 1 1 1 0 1 0 0 **1** 1 0 0
1 0 1	**0** 1 0 0 0 0 1 1 **1** 1 1 1
1 0 0	**0** 1 0 0 0 0 1 0 **1** 1 0 0
0 1 1	**0** 0 1 1 1 1 1 1 **1** 0 1 1
0 1 0	**0** 0 1 1 1 1 1 1 **1** 0 1 1
0 0 1	**0** 0 1 0 1 0 1 1 **1** 0 1 1
0 0 0	**0** 0 1 0 1 0 1 0 **1** 0 1 0

Die beiden sind Kontradiktionen.
Kontradiktionen müssen aber nicht immer Negationen von Tautologien sein:

P	**(P Λ ¬ P)**
1	1 **0** 0 1
0	0 **0** 0 1

Es gibt aber natürlich auch Sätze, die weder immer richtig noch immer falsch sind. Solche Sätze nennen wir **kontingente** Sätze.

Beispiel:

L S	**¬ (L v S)**
1 1	**0** 1 1 1
1 0	**0** 1 1 0
0 1	**0** 0 1 1
0 0	**1** 0 0 0

Def: „Ein Satz φ ist kontingent g.d.w. φ weder eine Tautologie noch eine Kontradiktion ist, das heißt g.d.w. φ bei mindestens einer Bewertung wahr, und bei mindestens einer Bewertung falsch ist.“

Alle Sätze unserer formalen Sprache gehören einer dieser semantischen Gruppen an.

Auch 2 Sätze können miteinander in Verbindung gebracht werden.

Def: „ Zwei Sätze φ und ψ bilden einen kontradiktorischen Gegensatz g.d.w. es keine Bewertung gibt, bei der φ und ψ denselben Wahrheitswert haben.“ (=bei jeder Bewertung unterschiedliche Wahrheitswerte haben)

Bsp.

P	**P**	**¬ P**
1	**1**	**0** 1
0	**0**	**1** 0

Die zwei Sätze P und ¬P stehen kontradiktorisch zueinander!

Noch ein längeres Beispiel dafür:

P Q	**(P --> Q)**	**(P Λ ¬ Q)**
1 1	1 **1** 1	1 **0** 0 1
1 0	1 **0** 0	1 **1** 1 0
0 1	0 **1** 1	0 **0** 0 1
0 0	0 **1** 0	0 **0** 1 0

Man könnte auch aus diesen zwei Sätzen einen machen, in dem man einen Bisubjunktor als Hauptjunktor zwischen die Beiden setzt. Dieser muss überall 0 sein.

→

P Q	**(P --> Q)↔(P Λ ¬ Q)**
1 1	1 1 1 ***0*** 1 0 0 1
1 0	1 0 0 ***0*** 1 1 1 0
0 1	0 1 1 ***0*** 0 0 0 1
0 0	0 1 0 ***0*** 0 0 1 0

Welche dieser Methoden man nimmt ist egal, man kommt zum selben Ergebnis. Mit Bisubjunktor muss man jedoch mehr schreiben! ☺

Def: „Zwei Sätze φ und ψ sind äquivalent g.d.w. φ und ψ bei jeder Bewertung denselben Wahrheitswert haben."

→

P Q	**((P --> Q)**	**(¬ P v Q)**
1 1	1 **1** 1	0 1 **1** 1
1 0	1 **0** 0	0 1 **0** 0
0 1	0 **1** 1	1 0 **1** 1
0 0	0 **1** 0	1 0 **1** 0

Man kann also sagen: „Zwei Sätze φ und ψ bilden einen kontradiktorischen Gegensatz g.d.w. die Bisubjunktion eine Kontradiktion ist.
Zwei Sätze „sind äquivalent g.d.w. die Bisubjunktion eine Tautologie ist."

Satzmengen auf Erfüllbarkeit prüfen

Def: „Eine Satzmenge Γ ist erfüllbar g.d.w. es mindestens eine Bewertung gibt, bei der alle Elemente von Γ wahr sind."

{¬P, (R vP)}

→

PR	**¬ P**	**(R v P)**
11	0 1	1 1 1
10	0 1	0 1 1
01	1 **0**	**1** 1 **0**
00	1 0	0 0 0

Die 3. Zeile beweist, dass die Satzmenge erfüllbar ist. Bei dieser einen Bewertung sind alle Elemente der Satzmenge {¬P, (R vP)}wahr. Alle anderen Zeilen spielen für die Erfüllbarkeit der Satzmenge keine Rolle mehr.

Def: „Eine Bewertung B ist ein Modell der Satzmenge g.d.w. alle Elemente der Satzmenge wahr sind.
Oder
Die Satzmenge hat ein Modell g.d.w. mindestens eine Bewertung existiert, bei der alle Elemente der Satzmenge wahr sind.
Oder
Eine Satzmenge ist erfüllbar, g.d.w. diese Satzmenge mindestens ein Modell hat."

Auch bei Satzmengen spielt die Anzahl der einzelnen Elemente keine Rolle:
{(A --> B);A;B} →

AB	**(A --> B)**	**A**	**B**
11	1 **1** 1	**1**	**1**
10	1 0 0	1	0
01	0 1 1	0	1
00	0 1 0	0	0

Die erste Zeile ist das Modell, und somit gilt, dass die Satzmenge erfüllbar ist.

Vo. 22.11.2010

Bsp. zur Erfüllbarkeit von Satzmengen:

{P, ¬Q, (¬P v Q)}

P Q	**P ¬Q (¬P v Q)**
1 1	**1** **0**1 **0**1 **1** 1
1 0	**1** **1**0 **0**1 **0** 0
0 1	**0** **0**1 **1**0 **1** 1
0 0	**0** **1**0 **1**0 **1** 0

Daraus folgt, dass diese Satzmenge nicht erfüllbar ist. Es gibt keine Satzreihe, bei der alle Elemente der Satzmenge den Wert 1 haben.

Den Begriff der Erfüllbarkeit kann man auch auf einzelne Sätze anwenden.
Def.: „Ein Satz φ ist erfüllbar g.d.w. es mindestens eine Bewertung gibt, bei der φ wahr ist".

Mit anderen Worten: „Ein Satz φ ist erfüllbar g.d.w. φ ein Modell hat."

Wir springen nun wieder ein wenig zurück und wiederholen das Bsp. mit dem Butler.
1) Entweder ist der Gärtner der Mörder oder der Buttler.
2) Es ist nicht der Fall, dass der Gärtner der Mörder ist.
Ergo gilt: Der Buttler ist der Mörder.

Dies ist ein Argument, bestehend aus 2 Prämissen und einer Konklusion. Die Logik ist nur an der formalen Korrektheit/logischen Korrektheit/Erfüllbarkeit interessiert.

→ Sei A irgendein Argument von dem gilt
(1) der böse Fall ist logisch unmöglich
(2) Die Annahme, der böse Fall liege vor, ist widersprüchlich und zwar völlig unabhängig von der Bedeutung irgendwelcher Wörter, die keine Formwörter sind.
(3) Der böse Fall ist prinzipiell unmöglich, und zwar völlig unabhängig von der Bedeutung irgendwelcher Wörter, die keine Formwörter sind.
(4) A ist deduktiv korrekt, und zwar völlig unabhängig von der Bedeutung irgendwelcher Wörter, die keine Formwörter sind.
(5) A ist deduktiv korrekt aufgrund einer logischen Form, und zwar völlig unabhängig von der Bedeutung irgendwelcher Wörter, die keine Formwörter sind.

[die unterstrichen Phrasen wurden jeweils im nachfolgenden Satz ersetzt. Sie bedeuten aber das Gleiche.]

Bsp. Butler in Argumentform:
1) Entweder P oder Q.
2) Es ist nicht der Fall, dass P.
Ergo gilt: Q.

I der formalen Sprache könnten wir das Ganze als eine Sequenz darstellen. Sequenzen bestehen immer aus einer Satzmenge (Prämissenmenge) und einem einzelnen Satz (Konklusion).

→ Sequenz: ‹{B v G, ¬B}, B›

Das wäre die Sequenz des Butler-Beispiels. Die eckigen Klammern drücken aus, dass alles zusammen eine Sequenz darstellt. Sequenzen heißen bei uns ab sofort „σ".

Def: „Eine Sequenz σ ist erfüllbar g.d.w. es keine Bewertung gibt, bei der alle Prämissen von σ wahr sind, aber die Konklusion von σ falsch ist."

Mit anderen Worten: „Eine Sequenz σ ist gültig g.d.w. bei jeder Bewertung, bei der alle Prämissen von σ wahr sind, auch die Konklusion wahr ist."

Oder: „Eine Sequenz σ ist gültig g.d.w. es keine Bewertung gibt, die ein Modell der Prämissenmenge von σ aber kein Modell der Konklusion ist!

Oder: „Eine Sequenz ist gültig g.d.w. jedes Modell der Prämissenmenge von σ auch ein Modell der Konklusion ist."

Oder: „ Ein Satz φ folgt logisch aus einer Satzmenge Γ [symbolisch ausgedrückt: Γ ⊨ φ] g.d.w. jedes Modell von Γ auch ein Modell von φ ist."

Oder: „ Eine Sequenz ‹ {Γ, φ} › ist gültig g.d.w. Γ ⊨ φ."
Man kann sagen:
„Eine Bewertung B ist ein Gegenbeispiel zur Sequenz ‹ Γ, φ› g.d.w. B ein Modell von Γ, aber kein Modell von φ ist."
Oder: „Eine Sequenz σ ist gültig g.d.w. es kein Gegenbeispiel zu σ gibt."

→ Bestimmen der Gültigkeit einer Sequenz: ‹{(A --> B), ¬B}, ¬A›

A B	**(A --> B), ¬B, ¬A**
1 1	1 **1** 1 **0**1 **0**1
1 0	1 **0** 0 **1**0 **0**1
0 1	0 **1** 1 **0**1 **1**0
0 0	0 **1** 0 **1**0 **1**0

→ Gültig weil es keine Zeile gibt, in der die Prämissen(A --> B) und ¬B wahr, aber die Konklusion ¬A falsch ist.

Nächstes Bsp. ‹{(A --> B), ¬A}, ¬B›

A B	**(A --> B), ¬A, ¬B**
1 1	1 **1** 1 **0**1 **0**1
1 0	1 **0** 0 **0**1 **1**0
0 1	0 **1** 1 **1**0 **0**1
0 0	0 **1** 0 **1**0 **1**0

Diese Sequenz ist UNGÜLTIG wegen der 3. Reihe. Die Prämissen (A --> B) und ¬A sind wahr, aber die Konklusion ¬B falsch.

<u>Logische Folgerungsprinzipien</u>:

$\{\varphi\} \models \neg\neg\varphi$	
$\{\neg\neg\varphi\} \models \varphi$	doppelte Negation!
$\{(\varphi \dashrightarrow \psi), \varphi\} \models \psi$	Modus Ponens!
$\{(\varphi \dashrightarrow \psi), \neg\psi\} \models \neg\varphi$	Modus Tollens!
$\{(\varphi \vee \psi), \neg\varphi\} \models \psi$	
$\{(\varphi \vee \psi), \neg\varphi\} \models \psi$	Disjunktiver Syllogismus!
$\{(\varphi \dashrightarrow \psi), (\varphi \dashrightarrow \chi), (\psi \dashrightarrow \chi)\} \models \chi$	Fallentscheidung, konstruktives Dilemma!
$\{(\varphi \dashrightarrow \psi), (\neg\varphi \dashrightarrow \psi)\} \models \psi$	einfaches Dilemma!

Vo. 29.11.10

Logische Folgerungen: Immer zwischen einer Satzmenge und einem einzelnen Satz!

„Für alle Sätze φ: φ ist eine Tautologie g.d.w. für alle Satzmengen Δ gilt: Δ ⊨ φ.“

1) Für alle Sätze φ: Wenn φ eine Tautologie ist, dann gilt für jede Satzmenge Δ: Δ ⊨ φ.
2) Für alle Sätze φ: Wenn für alle Satzmengen Δ gilt, dass Δ ⊨ φ, dann ist φ eine Tautologie.

{(P v ¬P)} → dieser Satz ist eine Tautologie (oben schon anhand einer Wahrheitstafel bewiesen). Das Gleiche gilt auch für φ, denn φ besteht aus {(P v ¬P)}. Daraus folgt, dass es keine Bewertung gibt, bei der die Prämissen wahr, aber die Konklusion falsch ist. Man kann also sagen, dass aus einer Tautologie immer eine Tautologie logisch folgt.

„Für alle Satzmengen Δ: Δ ist unerfüllbar g.d.w. für jeden Satz φ gilt: Δ ⊨ φ.“

1) Für alle Satzmengen Δ: Wenn Δ unerfüllbar ist, dann gilt für jeden Satz φ: Δ ⊨ φ.
2) Für alle Satzmengen Δ: Wenn für jeden Satz φ gilt, dass Δ ⊨ φ, dann ist Δ unerfüllbar.

Gilt zum Beispiel für: (P Λ¬P) → Dieser Satz ist eine Kontradiktion, also bei jeder Bewertung falsch. Solche Satzmengen müssen daher unerfüllbar sein. Die Sequenz wäre gültig, weil der böse Fall prinzipiell unmöglich ist.

„Für alle Satzmengen Δ und für alle Sätze φ gilt: Δ ⊨ φ g.d.w. Δ u {¬φ} unerfüllbar ist.“ [u steht für das mathematische Zeichen „vereinigt“]

„Für alle Sequenzen σ gilt: ‹Δ,φ› ist gültig g.d.w. Δ u {¬φ} unerfüllbar ist.

1) Für alle Satzmengen Δ und für alle Sätze φ gilt: Wenn Δ ⊨ φ, dann ist Δ u {¬φ} unerfüllbar.
2) Für alle Satzmengen Δ und für alle Sätze φ gilt: Wenn Δ u {¬φ} unerfüllbar ist, dann Δ ⊨ φ.

Wir stellen Theoreme auf, anhand derer wir später schneller den Wahrheitswert erkennen können.

→ (1) Δ ⊨ φ Zeige, dass gilt: Δ u {¬φ} ist unerfüllbar.

Wir wenden den indirekten Beweis an: d.h. dass wir das Gegenteil annehmen und zu verifizieren versuchen:

(2) Δ u {¬φ} ist erfüllbar! (Annahme)
(3) Δ u {¬φ} muss also ein Modell haben, d.h. eine Bewertung B, sodass alle Elemente von : Δ u {¬φ} wahr sind bei B. (schließen wir aus (2))
(4) B ist ein Modell von Δ.

(5) B ist ein Modell von {¬φ}, d.h. alle Elemente von Δ sind wahr und zugleich alle Elemente von {¬φ} sind wahr bei B. (ergibt sich aus (3))
(6) B ist ein Modell von {φ}, d.h. φ ist wahr bei B. (aus (1) und (4))
(7) B ist kein Modell von {¬φ}, d.h. es ist falsch bei B. → Widerspruch zu (5)!!
(8) Δ u {¬φ} ist unerfüllbar!!
Q.E.D [Quod erat demonstrandum]

Theorem in die andere Richtung:
(1) Δ u {¬φ} ist erfüllbar.   Zeige, dass Δ ⊨ φ.
(2) Annahme des Gegenteils: φ folgt nicht logisch aus Δ! [negiert ⊨, gibt's aber nicht als Symbol, deswegen schreib ich's aus]
(3) Δ u {¬φ} hat kein Modell, d.h. es gibt keine Bewertung bei der sowohl alle Elemente von Δ, als auch von {¬φ} wahr sind. (aus (1))
(4) Jedes Modell von Δ ist kein Modell von {¬φ}. (aus (3))
(5) Jedes Modell von Δ ist ein Modell von {φ}. (aus (4))
(6) Δ ⊨ φ → Widerspruch zur Annahme (2)
(7) Δ ⊨ φ
Q.E.D.

→ [Δ ⊨ ¬ φ g.d.w. Δ u {φ} unerfüllbar ist.]

Bsp. {(A --> B), A, ¬B} ist unerfüllbar.

{(A --> B), A, ¬B} = A u {¬φ}
→ {(A --> B), A} ⊨ B
‹{(a --> B), A},B› ist gültig.

Wir greifen das A heraus:
{(A --> B), ¬B} ⊨ ¬ A
{A, ¬ B} ⊨ ¬ (A --> B)   Beispiel für Modus Tollens!

Bsp.2) {(A --> B), A, B} ist erfüllbar.   [ich nehme jetzt für „folgt logisch nicht aus“ Negator -Folgt –aus, also „¬ ⊨“]

Es gilt: {(A --> B), A} ¬ ⊨ ¬ B
{(A --> B), B} ¬ ⊨ ¬ A
{A, B} ¬ ⊨ ¬ (A --> B)

Beginn mit AUSSAGELOGISCHEN BÄUMEN:

Jeder Baum hat eine Wurzel und mindestens einen Ast. Logische Bäume wachsen von oben nach unten. Auf einem Ast liegt mindestens ein Satz unserer formalen Sprache, wobei ein Satz auf mehreren Ästen liegen kann.

Startregel: Wurzel wird erzeugt, folgen keine weiteren Regeln, ist die Wurzel zeitgleich ein Ast.

Vo. 06.12.10

Regeln für die Konstruktion eines Baumes:
1) Anfangs-Startregel
2) Wachstumsregel: a) Verzweigungsregel b) Verlängerungsregel
3) Schließungsregel

Zu 2): Dadurch, und nur dadurch wachsen Bäume. Einen Satz *melken* bedeutet, ihn nach den Kriterien der Wachstumsregeln aufzugliedern. Nicht melkbar sind Literale, also einzelne Satzbuchstaben wie Q, P, L etc. und deren Negation. Ein Satz kann an einer Stelle nur einmal gemolken werden, an anderer Stelle dagegen schon. Weiter dürfen geschlossene Sätze oder so gut wie geschlossene Sätze nicht gemolken werden. Die Schließungsregel sagt, dass so gut wie geschlossene Sätze, sofort geschlossen werden müssen.

Welche Arten von Ästen gibt es?

Äste

Offene Äste

<u>geschlossene Äste</u>
[Äste, an deren unteren Ende, ein Schließungszeichen steht.]

Echt offene Äste [Äste, die nicht so gut wie geschlossen sind]

<u>so gut wie geschlossene Äste</u>
[Äste, auf denen sowohl ein Satz φ als auch die Negation von φ liegen]

<u>fertige Äste</u>
[Äste für die gilt:
Jeder auf ihnen liegende Satz
Ist entweder ein Literal oder ein
Auf diesem Ast bereits geschlossener
Ast]

<u>unfertige Äste</u>
[echt offene Äste, die nicht fertig sind]

Eigentlich kann man sagen, dass es einer von den 4 unterstrichenen Arten sein muss. Alle 9 Wachstumsregeln beziehen sich auf unfertige Sätze, denn nur sie können wachsen.

Wachstumsregeln:
1) Konjunktion: $(\varphi \wedge \psi)$

$$\begin{array}{c} | \\ \varphi \\ \psi \end{array}$$

2) Negation der Konjunktion

3) Disjunktion

4) Negation der Disjunktion: ¬ (φ v ψ)

|

¬ φ

¬ ψ

5) Subjunktion

6) Negation von Subjunktionen: ¬ (φ --> ψ)

|

φ

¬ ψ

7) Bisubjunktion

8) Negation der Bisubjunktion

9) Negation einer Negation: ¬ ¬ φ

|

φ

1,4,6,9 sind Verlängerungsregeln. Mit ihnen können wir bereits arbeiten.

Bsp 1) {(PΛQ),(¬QΛS)}

Als Wurzel untereinander anschreiben:

(PΛQ)

(¬QΛS)

|

P

Q

|

¬Q

Sϟ → Konjunktionsregel → auf dem Ast liegen sowohl Q als auch dessen Negation, daher wird der Ast geschlossen und das Schließungszeichen ϟ dahinter gesetzt. Der Baum ist fertig.

Bsp 2) {(PΛQ), ¬ (T --> (Q v S)}

(PΛQ)

¬ (T --> (Q v S)

|

P

Q

|

T

¬ (Q v S)

|

¬ Q

¬ Sϟ

Bsp 3) $\{\neg (T \wedge S) \vee (Q \rightarrow P))\}$

$\neg (T \wedge S) \vee (Q \rightarrow P))$

|

$\neg \neg (T \wedge S)$

$\neg (Q \rightarrow P)$

|

T

S

|

Q

$\neg$ P ϟ

Welche Arten von Bäumen gibt es?

Bäume

Fertige Bäume
[Ein Baum ist fertig g.d.w. für jeden seiner Äste gilt, dass sie geschlossen oder fertig sind.]

unfertige Bäume
[g.d.w. nicht fertig]

Geschlossene Bäume
[g.d.w. alle Äste des Baumes geschlossen sind]

offene Bäume
[g.d.w. er nicht geschlossen ist]

Vo. 13.12.10

Verzweigungsregeln: Also die Art von Junktionen, die oben in der Liste fehlen!

2) Negation einer Konjunktion: ¬ (φΛψ)

¬ φ   ¬ ψ

3) Disjunktionen: (φ v ψ)

φ   ψ

5) Subjunktionen: (φ --> ψ)

¬ φ   ψ

7) Bisubjunktionen: (φ↔ψ)

φ   ¬ φ
ψ   ¬ ψ

8) Negation von Bisubjunktionen: ¬ (φ↔ψ)

φ   ¬ φ
¬ ψ   ψ

Bsp. 1) {(M v N), (S v ¬ M), (M Λ ¬ S)}

Start: (M v N)
(S v ¬ M)
(M Λ ¬ S)

Wir melken in diesem Fall von oben nach unten, beginnen bei (M v N).

M   N

S   ¬ Mϟ   S   ¬ M

M   M   M
¬ S ϟ   ¬ S ϟ   ¬ Sϟ

Baum ist fertig, weil alle Äste geschlossen wurden!

Nun gibt es 2 Strategien, die Wachstumsregeln anzuwenden. Diese Strategien sind wichtig, werden bei der Klausur vorausgesetzt!!!

1) Zuerst Verlängerungsregeln, dann Verzweigungen!
2) Wenn eine Verzweigung unumgänglich ist, dann die zuerst, bei der so gut wie geschlossene Äste herauskommen!

Bsp. 1 mit Strategie (wir beginnen bei (M Λ ¬ S), weil wir als erstes eine Verlängerungsregel und noch keine Verzweigungsregel anwenden wollen:

(M v N)
(S v ¬ M)
(M Λ ¬ S)

M
¬ S

S ϟ ¬ M ϟ

Man sieht, dass dieser Baum zum gleichen Ergebnis führt, aber mit weniger Schreibarbeit!

Bsp. 2) {¬ (A Λ K), ((P --> S) v ¬ (G v T))}

¬ (A Λ K)
((P --> S) v ¬ (G v T))

¬A ¬ K

(P --> S) ¬ (G v T) (P --> S) ¬ (G v T)

¬ P S ¬G ¬ P S ¬ G
¬T ¬ T

Dieser Baum hat nur mehr offene, aber FERTIGE Äste. Daraus folgt, dass die Satzmenge erfüllbar ist. Will man nun ein Modell für diese Satzmenge aus einem Baum ablesen, muss man einem fertigen Ast dieses Baumes nehmen, und dem Satzbuchstaben den Wert 1 geben, allen anderen Satzbuchstaben auf diesem Ast den Wert 0.

Mit einem Baum stellen wir prinzipiell fest, ob eine Satzmenge erfüllbar ist oder nicht. Ist ein Baum geschlossen, also es sind nur noch geschlossene Äste vorhanden, ist die Satzmenge nicht erfüllbar. Hat er auch nur einen offenen, fertigen Ast, ist die Satzmenge erfüllbar. Wie bei den Wahrheitstafeln können wir auch anhand der Bäume feststellen, ob es sich um eine Tautologie handelt. Folgendes Bsp.

Bsp.3) (((P --> (Q --> R)) --> (Q --> (P --> R))) das wäre unser φ! Nun sollen wir feststellen, ob es sich hier um eine Tautologie handelt!

Def: φ ist eine Tautologie g.d.w. ¬ φ unerfüllbar ist. → Wir negieren φ, also ¬ (((P --> (Q --> R)) --> (Q --> (P --> R)))!! Diese Satzmenge muss unerfüllbar sein, also nur geschlossene Äste haben:

¬ (((P --> (Q --> R)) --> (Q --> (P --> R)))

(P --> (Q --> R))
¬ (Q --> (P --> R))

Q
¬ (P --> R)

P
¬ R

¬ P ϟ (Q --> R)

¬ Q ϟ R ϟ

→ unerfüllbar, also handelt es sich hier um eine Tautologie!!

Man kann auch Folgerungen erkennen:
Bsp. 3) {((P --> Q) --> R), (S --> ¬ P), T, ((¬ S Λ T) --> Q)} $\models$ R

→ Δ $\models$ φ g.d.w. Δ u ¬ φ unerfüllbar ist!

(P --> Q) --> R)
(S --> ¬ P)
T
((¬ S Λ T) --> Q)
¬ R [mit diesem negierten φ muss ein geschlossener Baum entstehen damit gilt: Δ $\models$ φ]

¬ (P --> Q) | Rϟ

P
¬ Q

¬ S | ¬ P ϟ

¬ (¬ S Λ T) | Qϟ

¬ ¬ S ϟ | ¬ Tϟ

→ Geschlossener Baum, daraus folgt, dass die Folgerungsbehauptung besteht!!

Vo. 10.01.2011

Die Formalisierung

Formalisierungsschlüßel:

R → Es regnet.
U → Es ist kalt.
S → Die Sonne scheint.
W → Der Wind bläst.
B → Es ist bewölkt.
H → Ich bleibe zuhause.

Die Sätze gehören nicht ins aussagenlogische System. Deutschen Sätzen werden nun Buchstaben zugeordnet.

Synonyme: bedeutungsgleiche Sätze dürfen gleich formalisiert werden.

Äquivalenz-Prinzip: Wenn ein deutscher Satz formalisiert werden darf, darf auch jeder äquivalente Satz formalisiert werden.
Z.B. Es regnet.
Regen fällt. } R

1) „Es ist nicht der Fall, dass…“ entspricht unserem Negator ¬

„Es ist nicht der Fall, dass es bewölkt ist.“ Wird, nachdem laut Formalisierungsschlüssel B für „Es ist bewölkt.“ steht, folgendermaßen formalisiert: ¬ B
Der Negator ersetzt „Es ist nicht der Fall, dass…“ und B laut oben „Es ist bewölkt.“

„Es ist nicht bewölkt“
„Es ist unbewölkt“ } ¬ B

2) „Es ist kalt <u>aber</u> die Sonne scheint.“
→ (K Λ S)

„Es ist kalt aber die Sonne scheint.“
„Es ist kalt obwohl die Sonne scheint.“
„Trotz Sonnenschein ist es kalt.“
„Es ist kalt und es scheint die Sonne.“ } (K Λ S)

3) „Der Wind bläst <u>oder (und/oder)</u> es ist bewölkt.“ → (W v B) (B v W)

4) „<u>Wenn</u> es bewölkt ist, <u>dann</u> regnet es.“ (B --> R)

„Es regnet, wenn es bewölkt ist“ muss umgewandelt werden. (R --> B) ist hier nicht erlaubt. Äquivalenz-Prinzip. Wenn B, dann R.

5) „Nur wenn es bewölkt ist, regnet es.“ (R --> B) kann aber auch als (¬ B --> ¬ R) geschrieben werden.
→ Es regnet nur, wenn es bewölkt ist.“

6) „Es ist kalt genau dann wenn der Wind bläst.“ (W --> K) Λ (¬W --> ¬ K)
Äquivalenz: (W ↔ K)

Vo. 17.01.2011

Ein Argument wird durch eine Sequenz formalisiert. → Diese Sequenz wird logisch analysiert. → Ergebnis über die Gültigkeit der Sequenz. → Das Ergebnis wird rückübertragen auf das Argument.

Vom Argument zur Sequenz = Formalisierung!

„Weder….noch“-
R: Es regnet.
K: Es ist kalt.

„Weder regnet es, noch ist es kalt.“ → (¬ R Λ ¬ K)

Äquivalenz: ¬ (R v K)
„Weder…noch“ Phrasen sind immer eine Konjunktion mit 2 negierten Gliedern oder deren Äquivalenz.

„Ausschließendes Oder“:
Dazu die Wahrheitstafel:

Φ ψ	**Φ oder ψ (aber nicht beides)**	
1 1	0	Null deswegen, weil beim ausschließenden Oder nicht beide Glieder wahr sein können!
1 0	1	
0 1	1	
0 0	0	Das gleiche gilt hier, es können nicht beide falsch sein!

Äquivalente Formen:

Φ ψ	**¬ (φ↔ψ)**	**(φ↔¬ψ)**	**(¬φ↔ψ)**
1 1	0	0	0
1 0	1	1	1
0 1	1	1	1
00	0	0	0

Beispiele:

1) 1. Frege wurde in Weimar oder in Wismar geboren.
 2. Frege wurde in Wismar geboren.
Ergo gilt: Es ist nicht der Fall, dass Frege in Weimar geboren wurde.

→ Ausschließendes Oder weil er ja nicht in beiden Orten geboren worden sein kann.

P: Frege wurde in Weimar geboren.
Q: Frege wurde in Wismar geboren.

Umgeformt:
1. ¬ (P↔Q)
2. Q
Ergo gilt: ¬ P Gültigkeit durch logischen Baum prüfen!!

. ¬ (P↔Q)
Q
¬ ¬P
P

P ¬ P
¬ Q ϟ Q ϟ → Wurzel unerfüllbar, daher Argument gültig!!

Bsp. 2)

1. Wenn Gott gütig und allmächtig ist, dann gibt es kein Leiden in der Welt.
2. Es gibt Leiden in der Welt.
Ergo gilt: Gott ist weder gütig noch allmächtig.

G: Gott ist gütig.
A: Gott ist allmächtig.
L: Es gibt Leiden in der Welt.

Umgeformt:
1. ((G Λ A) --> ¬ L)
2. L
Ergo gilt: (¬ GΛ ¬ A)
Oder: ¬ (G v A) Wieder durch Baum prüfen.

→

((G Λ A) --> ¬ L)
L
¬ ¬ (G v A)

¬ (G v A) ¬ L ϟ

¬ G ¬ A

¬ ¬ G ϟ ¬ ¬ A ¬ ¬ G ¬ ¬A ϟ

A G → Argument ungültig, weil die Wurzel erfüllbar ist. (2 offene Äste)

Gegenbeispiel: A: 1 ; L: 1 ; G: 0

Bsp. 3)
1. Im Kapitalismus wird nur dann produziert, wenn die Unternehmer Profit machen.
2. Nur wenn die Unternehmer konkurrenzfähig sind, machen sie Profit.
3. Im Kapitalismus sind Unternehmer nur dann konkurrenzfähig, wenn sie ihre Betriebe ständig modernisieren.
4. Wenn die Unternehmer ihre Betriebe ständig modernisieren, dann ersetzen sie menschliche Arbeitskräfte durch Maschinen.

5. Wenn Unternehmer menschliche Arbeitskräfte durch Maschinen ersetzen, dann wächst die Zahl der Arbeitslosen.

Ergo gilt: Im Kapitalismus wächst die Zahl der Arbeitslosen.

K: Es herrscht Kapitalismus.
P: Es wird produziert.
U: Die Unternehmer machen Profit.
F: Die Unternehmer sind konkurrenzfähig.
M: Die Unternehmer modernisieren ständig ihre Betriebe.
A: Die Unternehmer ersetzen menschliche Arbeitskräfte durch Maschinen.
W: es wächst die Zahl der Arbeitslosen.

Umformen:
1. (K --> (P --> U))
2. (U--> F)
3. (K--> (F --> M))
4. (M--> A)
5. (A--> W)
Ergo gilt: (K--> W)

Beim Umformen ist es wichtig, dass das notwendige Glied eines Satzes immer hinten steht. Zum Beispiel bei 1. Profit ist notwendig um zu produzieren!! Deswegen steht U an hinterer Stelle!!!!

Baum:

7) (K --> (P --> U))
6) (U--> F)
4) (K--> (F --> M))
3) (M--> A)
2) (A--> W)
1) ¬ (K--> W)

K
¬ W

¬ A W ϟ

¬ M A ϟ

¬ K ϟ 5) (F --> M)

¬ F M ϟ

¬ U F ϟ

¬ K ϟ (P --> U)

¬ P U ϟ → Baum offen, daher Argument/Sequenz ungültig!

[Die Zahlen 1-7 vor den Formeln geben an, in welcher Reihenfolge gemolken wurde.]

Gegenbeispiel:

K: 1
P:0
U:0
F:0
M:0
A:0

W:0

Weiter Formalisierungen:

1) genau dann wenn…..dann und nur dann wenn $(\varphi \leftrightarrow \psi)$

2) wenn …. dann…. $(\varphi \dashrightarrow \psi)$

3) nur wenn…. dann…. $(\psi \dashrightarrow \varphi)$ [die Bedingung steht hinten, also nur wenn φ, dann ψ]

4) entweder…..oder (=ausschließendes Oder) $\neg (\varphi \leftrightarrow \psi)$

5) weder….noch….. $(\neg \varphi \wedge \neg \psi)$

6) einschließendes Oder $(\varphi \vee \psi)$