

VO: Kamitz - Der Lügner, Mitschrift

David Horvath

24. Februar 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung	3
1.1 Paradoxien allgemein	3
2 der „schwache Lügner“	3
2.1 Die Bewertung von Lösungsvorschlägen	4
3 Eine kurze Geschichte des Lügners	4
4 Eine mögliche Lösung des schwachen Lügners	5
5 Mehrwertige Lösung des schwachen Lügners	6
5.1 Nachteile der 3-wertigen Logik	7
6 Der verstärkte Lügner	7
7 Lösungsvorschlag des Lügners von Saul Kripke	8
7.1 Wiederholung	9
7.2 Bolzanos Beitrag	10
8 Dialektischer Lösungsansatz	10
8.1 Wiederholung: der verstärkter Lügner im dialektischen Lösungsansatz	12
9 Ansatz von Gupta	12
10 Die Cassatio-Lösung	13
11 Das Karten-Paradoxon	13
12 Die Lügner-Lösung von Martin	14
13 Die Lösung von Alfred Tarski	15

1 Einführung

In dieser Lehrveranstaltung geht es um die Paradoxie (bzw. die Antinomie) des Lügners; sie wird auch genannt: „der Kreter“, „Epimenides“. In dieser Einheit besprechen wir den „klassischen (auch: schwachen) Lügner“.

1.1 Paradoxien allgemein

Allgemein besteht eine Paradoxie aus einer schrittweisen Argumentation, die enthält:

1. unproblematische Prämissen
2. logisch gültige Schlüsse
3. eine widersprüchliche Konklusion

Beim Lügner-Paradoxon kommt zu diesen Bestandteilen zusätzlich noch ein Lügner-Satz (oder mehrere) hinzu. Wo liegt das Problem? 1), 2) und 3) sind zusammen nicht möglich, wenn wir die klassische Logik zu Grunde legen. Wahre Prämissen können hier gültig nur zu wahren Konklusionen führen: irgendwo (bei 1, 2, oder 3) muss also ein Fehler sein! Der Lügner ist im 4. Jahrhundert vor Christus formuliert worden, man beschäftigt sich damit also schon seit der Antike und besonders im Mittelalter, als im 12. und 13. Jahrhundert die Logik eine Blütezeit erlebte. Auch in der Neuzeit hat man sich mit den Mitteln der *modernen Logik* mit dieser Paradoxie auseinandergesetzt; ALFRED TARSKI etwa hat die Beschäftigung mit Paradoxien als wichtig erachtet - für unser Verständnis von Logik und unseren Überzeugungen (in Form von Prämissen). Der Kreter ist also mehr als 2000 Jahre lang untersucht worden und es gibt bis heute keine allgemein akzeptierte Lösung dafür.

2 der „schwache Lügner“

1) Der Lügnersatz Hier haben wir nur einen (einfachen) Lügnersatz:

S1: Das, was in diesem Rechteck steht, ist falsch.

2) Die schrittweise Argumentation der Paradoxie kann folgendermaßen entwickelt werden:

(* kennzeichnet Annahmen)

(* 1) S1 besagt, dass S1 falsch ist.

(* 2) S1 ist ein sinnvoller, eindeutiger, deutscher Aussagesatz

(* 3) Von jedem sinnvollen, eindeutigen, deutschen Aussagesatz, der besagt, dass XY, gilt: Er ist wahr, gdw. XY.

(4) S1 ist ein sinnvoller, eindeutiger, deutscher Aussagesatz, der besagt, dass S1 falsch ist (aus 1, 2 - zusammengefasst)

(5) S1 ist wahr, gdw. S1 ist falsch (aus 3, 4)

(* 6) Von jedem sinnvollen, eindeutigen, deutschen Aussagesatz gilt: Er ist falsch, gdw. er nicht wahr ist.

(7) S1 ist falsch gdw. S1 ist nicht wahr (aus 2, 6)

(8) S1 ist wahr gdw. S1 ist nicht wahr (aus 5, 7, Transitivität)

(8 - formalisiert) $A \leftrightarrow \neg A$ (Kontradiktion)

Die Annahmen (1), (2) und (3) sind unsere unproblematischen (?) Prämissen; aus diesen wird gemäß den Regeln der Logik gültig zunächst auf (4) und (5) geschlossen. Bei (5) zeigt sich bereits der Widerspruch - wenn man voraussetzt, dass „falsch“ interpretiert wird als „nicht wahr“; das drückt die Annahme (6) aus. Danach kann man weiter gültig auf (7) und (8) schließen. Die widersprüchliche Konklusion (8) als Resultat vervollständigt unsere Paradoxie.

Einwände In der Prämisse (6) wird das *Bivalenzprinzip* vorausgesetzt. Das besagt, dass jeder sinnvolle, eindeutige, deutsche Aussagesatz genau einen der zwei Wahrheitswerte „wahr“ oder „falsch“ hat. Dieses Prinzip ist immer wieder angegriffen worden und so ergibt sich auch eine mögliche Lösung für das Lügner-Paradoxon.

Eine andere Lösung lautet, $(A \leftrightarrow \neg A)$ nicht als widersprüchlich aufzufassen, sondern einfach als eine Kontradiktion: Das ist der Ausweg der klassischen Logik.

Eine weitere Lösung besteht darin, alle selbstreferenziellen Sätze als sinnlos zu betrachten. Diese Lösung scheint aber zu weit zu gehen, wenn man an Sätze denkt wie: „Dieser Satz hat fünf Wörter“ oder einfach „Das ist ein deutscher Satz“. Diese Beispiele sind nach unserem Verständnis sinnvoll (und sogar wahr).

Die Annahmen Das Lügner-Paradoxon ergibt sich also aus dem Lügner-Satz und drei Annahmen:

- Der Satz S1 ist ein eindeutiger, sinnvoller, deutscher Aussagesatz
- korrespondenztheoretischer Wahrheitsbegriff
- Bivalenzprinzip

Die Ablehnung einer dieser Annahmen führt automatisch zu einer Lösung des Lügners. Wir werden Lösungen besprechen, die auf allen diesen Möglichkeiten beruhen. Man muss aber immer fragen, wie die Ablehnung einer dieser Annahmen *begründet* wird.

2.1 Die Bewertung von Lösungsvorschlägen

Wir sollten einheitliche Kriterien verwenden, um unterschiedliche Lösungsvorschläge zu bewerten. Es macht Sinn zur Prüfung heranzuziehen:

Universalität Ein Vorschlag ist um so besser, je mehr andere Varianten des Lügners (oder Paradoxien) er löst

Natürlichkeit Ein Vorschlag ist um so ungünstiger, je mehr er vom common-sense abweicht (bei sonst gleicher Bewertung)

Einfachheit Ein Vorschlag ist um so besser, je weniger Voraussetzungen er macht

„logischer Konservatismus“ Ein Vorschlag ist um so ungünstiger, je weiter er sich von den eleganten Regeln der klassischen Logik entfernt.

Diese Kriterien können aber ebenfalls einer Diskussion unterzogen werden.

2. Einheit - 20. 10. 2009

Ein möglicher Einwand gegen den schwachen Lügner in der besprochenen Form ist, zu sagen, S1 ist *nicht eindeutig* (also die Prämisse 2 zurückzuweisen). Mehrdeutigen Sätzen kann man nicht automatisch einen der beiden Wahrheitswerte zuweisen - man muss zunächst klären, welche Bedeutung gemeint ist. Das Standardbeispiel ist ein Satz wie „Hinter der Kurve ist eine Bank“. Man kann hier nicht sagen, dieser Satz ist wahr (oder falsch), weil nicht klar ist, ob eine Sitzgelegenheit oder ein Geldinstitut gemeint ist.

3 Eine kurze Geschichte des Lügners

Die Lügner-Paradoxie geht auf EUBULIDES AUS MILET (Mitte des 4. Jh. v. Chr.), ein Zeitgenosse ARISTOTELES', zurück. Im Mittelalter kommt sie in der Form vor, dass gesagt wurde: Sokrates sagt uns nur einen Satz - sonst nichts, und zwar: „Socrates nunc dicit falsum.“ Also: „Ich sage jetzt etwas

falsches“. Damit liegt ein selbstreferenzieller Satz vor, der über sich selbst sagt, falsch zu sein. Daraus ergibt sich die gleiche Konsequenz, wie bei der Form der Darstellung aus der letzten Einheit:

$$(A \leftrightarrow \neg A)$$

Diese Darstellung mit S1, der in ein Rechteck geschrieben wird geht auf den polnischen Logiker JAN LUKASIEWICZ im frühen 20. Jahrhundert zurück.

Warum wird diese Paradoxie auch „Lüger“ oder „Kreter“ oder „Epimenides“ genannt?

EUBULIDES meinte, die Aussage „Ich lüge jetzt“ hat die gleiche Konsequenz wie oben, dass der Satz wahr ist, genau dann wenn er nicht wahr ist. Das trifft aber nicht zu und zwar aufgrund der Verwendung von „lügen“. Allgemein bedeutet „lügen“ soviel wie „absichtlich die Unwahrheit sagen“. Dadurch entsteht aber nicht unsere Paradoxie.

Damit man zeigen kann $(A \leftrightarrow \neg A)$ muss man zeigen, dass

1. $(A \rightarrow \neg A)$ und außerdem
2. $(\neg A \rightarrow A)$

Aus „ich lüge jetzt“ lässt sich 1) ableiten, aber nicht die zweite Implikation. Für 2) muss man im Beweis ausgehen von $(\neg A)$ und über Ableitungen irgendwann zu (A) kommen. Wenn man aber von $(\neg A)$ ausgeht - also von „Ich lüge jetzt nicht“ (also von „Ich hab jetzt nicht die Absicht, die Unwahrheit zu sagen“) - folgt nichts relevantes für die Wahrheit des Satzes daraus! Das Lügen (also die Absicht) verändert die Situation; im Mittelalter hat man das schon erkannt und die Version „Ich sage jetzt etwas falsches“ gewählt.

Seinen Namen hat die Paradoxie von der Geschichte des Epimenides, der gesagt haben soll „Alle Kreter sind Lügner“ und selbst ein Kreter war. Das sieht ebenfalls paradox aus, es gibt aber Lösungsmöglichkeiten und führt eben NICHT zur Konklusion $(A \leftrightarrow \neg A)$:

(* kennzeichnet Annahmen)

- (* 1) Epimenides ist ein Kreter
- (* 2) Epimenides sagt, dass alle Kreter lügen
- (* 3) Ein Satz, der besagt, dass XY ist wahr, genau dann wenn XY
- (* 4) Es gilt das Bivalenzprinzip
- (* 5) „Alle Kreter lügen“ ist wahr
- (6) Alle Kreter lügen
- (7) Epimenides lügt
- (8) Epimenides sagt absichtlich die Unwahrheit
- (9) Es ist nicht wahr, dass alle Kreter lügen
- (10) Nicht alle Kreter lügen
- (11) Mindestens ein Kreter lügt nicht

daraus *folgt nicht*:

Epimenides lügt nicht (Widerspruch zu (7))

3. Einheit - 27. 10. 2009

4 Eine mögliche Lösung des schwachen Lügners

Wir haben schon gesehen, dass die Paradoxie die Gültigkeit des Bivalenzprinzips voraussetzt und daher dessen Ablehnung eine mögliche Lösung darstellt. Gegen das Bivalenzprinzip sind auch - abgesehen vom Lügner-Problem - folgenden Gründe angeführt worden:

- Sätze über die Zukunft sind jetzt nicht wahr oder falsch.
- Es gibt auch Zwischenstufen zwischen wahr und falsch, etwa „neutral“ oder „unbestimmt“. Beispiel: „Hans ist wohlhabend“ - ist dieser Satz wahr oder falsch? Es gibt klare Fälle, in denen jemand eindeutig wohlhabend ist oder eindeutig nicht - aber was machen wir, wenn Hans dazwischen liegt?

Auch ARISTOTELES (der „Erfinder der Logik“) hat Zweifel bezüglich des Bivalenzprinzips gehabt.

Wenn wir es zurückweisen wollen, müssen wir zunächst analysieren, was das Bivalenzprinzip besagt; es behauptet:

- Es gibt genau 2 Wahrheitswerte: „wahr“ und „falsch“
- Aussagesätzen kann *genau einer* dieser 2 Wahrheitswerte zugeordnet werden - nicht aber Fragen, Aufforderungen und anderen Sätzen.
- Weitere Einschränkungen: Das gilt nur für sinnvolle, eindeutige Aussagesätze, die diese Eigenschaften stabil haben, also in allen Situationen.
- Das Impliziert nicht die *Feststellbarkeit des Wahrheitswertes* eines Satzes.

Möglichkeiten das Bivalenzprinzip abzulehnen, die sich aus der obigen Analyse ergeben. Alle Varianten der folgenden Übersicht sind in der Geschichte vertreten worden:

1. Es gibt *mehr als 2* Wahrheitswerte (**mehrwertige Lösungen**);
Vertreter: ANATOLI BOTSCHWAR.
2. Es gibt genau 2 Wahrheitswerte, aber
 - 2.1 Jeder sinnvolle, eindeutige, deutsche Aussagesatz hat *höchstens 1 Wahrheitswert* - manche dieser Sätze haben aber „Wahrheitswertlücken“ (**Wahrheitswertlücken-Theorien**);
Vertreter: SAUL KRIPKE.
 - 2.2 Jeder sinnvolle, eindeutige, deutsche Aussagesatz hat *mindestens 1 Wahrheitswert*, und zwar so, dass entweder:
 - 2.2.1 Es gibt Sätze, die wahr und falsch gleichzeitig sind - und das *stabil* (**dialetischer Ansatz**); Vertreter: GRAHAM PRIEST, oder:
 - 2.2.2 Es gibt Sätze, die wahr und falsch gleichzeitig sind - und das *instabil* (**oszillierender Ansatz**); Vertreter: A. GUPTA/H. HERZBERGER

5 Mehrwertige Lösung des schwachen Lügners

(Version 1 in der Übersicht)

Es wird nun folgende Annahme gemacht: Es gibt 3 Wahrheitswerte: wahr, falsch, unbestimmt. Das heißt, es gilt das *Trivalenzprinzip*: Jeder sinnvolle, eindeutige, deutsche Aussagesatz hat genau einen der 3 Wahrheitswerte - und zwar stabil. Den Wahrheitswert „unbestimmt“ hat z. B. der Lügnersatz S1.

In der paradoxen Lügner-Argumentation wird nun (6) ersetzt durch das Trivalenzprinzip, dann folgt:

- (7) S1 ist weder wahr noch falsch (5, 6)
- (8) S1 ist unbestimmt (6, 7)

Dass S1 nicht falsch ist, kann durch einen indirekten Beweis (Gegenteil wird angenommen und ad absurdum geführt) gezeigt werden:

(*) S1 ist falsch

S1 ist wahr (5)

S1 ist wahr UND falsch

⇒ Widerspruch zum Trivalenzprinzip!

4. Einheit - 3. 11. 2009

Das Trivalenzprinzip und der Lügner Wir haben zuletzt eine mögliche Lösung des schwachen Lügners durch die 3-wertige Logik besprochen. Das Trivalenzprinzip wird von manchen Logikern vertreten, weil sie es für angemessen halten, um alltagssprachliche Sätze zu formalisieren. Damit ergibt sich dann quasi nebenbei auch eine Lügner-Lösung.

5.1 Nachteile der 3-wertigen Logik

Das Trivalenzprinzip weicht von der klassischen Logik ab. Gemessen an unseren vier Bewertungskriterien (s. 1. Einheit) ist diese Lösung also mangelhaft, bezüglich des „logischen Konservatismus“. Aber warum sollten wir überhaupt an der klassischen Logik festhalten? Ein Grund ist, dass in einer 3-wertigen Logik jedenfalls alles sehr viel komplizierter und schwieriger wird: Von der Definition der Junktoren zu der logischen Schließens. Hier gibt es dann mehrere mögliche Definitionen und es ist nicht klar, welche angemessener ist - *zumindest vier unterschiedliche Versionen* sind vertreten worden. Nach welchen Kriterien sollen wir uns für welche Version entscheiden, ohne, dass reine Willkür herrscht.

Es gibt aber auch noch **weitere Probleme**: etwa Beweise, die hier nicht mehr gelten, wie der disjunktive Syllogismus: $((A \vee B), (\neg A)) \models (B)$.

Manko der 3-wertigen Logik Wenn wir diese Gründe akzeptieren, ziehen wir Lösungen vor, die nahe an der klassischen Logik bleiben. Gibt es noch weitere Mankos der 3-wertigen Logik? Ja! Ein weiterer Nachteil ist: sie versagt genauso bei folgender Paradoxie:

6 Der verstärkte Lügner

Dieser sieht so aus:

S2: Das was in diesem Rechteck steht, ist nicht wahr.

Für die klassische Logik ist S2 mit S1 äquivalent, weil gilt: nicht wahr = falsch (laut Bivalenzprinzip). Für die 3-wertige Logik macht S2 aber schon einen Unterschied: man kommt sofort zu einem Widerspruch, im Gegensatz zu S1.

Egal ob man annimmt S2 ist wahr/falsch/unbestimmt - immer kommt man zum Widerspruch. „Nicht wahr“ heißt hier soviel wie „falsch oder unbestimmt“. Wenn S2 wahr ist, dann stimmt was er sagt und dann ist er nicht wahr. Wenn S2 nicht wahr ist, dann stimmt S2 aber und er ist wahr.

Der verstärkte Lügner in der 3-wertigen Logik: Die schrittweise Argumentation läuft so:

- (*1) S2 besagt, dass S2 nicht wahr ist.
- (*2) S2 ist ein sinnvoller, eindeutiger, deutscher Aussagesatz
- (*3) Für jeden sinnvollen, eindeutigen, deutschen Aussagesatz, der besagt, dass XY gilt: Er ist wahr, gdw. XY.
- (4) S2 ist ein sinnvoller, eindeutiger, deutscher Aussagesatz, der besagt, dass S2 nicht wahr ist (aus 1, 2)
- (5) S2 ist wahr, gdw. S2 nicht wahr ist (aus 3, 4)
- (5 formalisiert) $(A \leftrightarrow \neg A)$

Man kommt also noch schneller zum Widerspruch und außerdem ist das Bivalenzprinzip hier nicht mehr vorausgesetzt: Es spielt keine Rolle mehr, weil es nicht um Falschheit geht.

Analog kann man für die 3-wertige Logik S1 so formulieren: „Das was in diesem Rechteck steht, ist falsch oder unbestimmt“.

Fazit: Das Trivalenzprinzip hilft also nicht bei der Version S2 (verstärkter Lügner). Eines unserer Bewertungskriterium ist die *Universalität*: Eine Lösung ist umso besser, je mehr Lügner-Varianten sie löst. Die 3-wertige Logik ist damit also eine weniger gute Lösung, weil sie nur den schwachen Lügner löst, aber beim verstärkten Lügner versagt. Außerdem entfernt sie sich von der klassischen Logik - mit den erwähnten Nachteilen.

7 Lösungsvorschlag des Lügners von Saul Kripke

Kripkes Vorschlag basiert auf „truth value gaps“ (**Wahrheitswert-Lücken**). Damit ist gemeint, dass *manche Sätze nicht wahr und auch nicht falsch* sind: sie haben Wahrheitswert-Lücken; dieser Vorschlag fällt unter 2.1 in unserer Übersicht.

Prinzip der Wahrheitswert-Lücken: Es gibt genau zwei Wahrheitswerte. Jeder sinnvolle, eindeutige, deutsche Aussagesatz ist entweder wahr oder falsch oder er hat eine Wahrheitswertlücke (d.h. er hat *keinen* Wahrheitswert).

Damit wird sowohl das Bivalenzprinzip als auch das Trivalenzprinzip abgelehnt - obwohl es einerseits genau 2 Wahrheitswerte gibt und andererseits es für jeden Satz 3 Möglichkeiten gibt, ihn zu bewerten. Gibt es hier wirklich einen Unterschied zur 3-wertigen Logik, oder hat nur der dritte Wahrheitswert „unbestimmt“ hier einen anderen Namen?

Analogie zum 3-wertigen Ansatz:

- Jeder Satz fällt in eine von drei Kategorien.
- Der Lügnersatz S1 fällt in die dritte Kategorie, neben „wahr“ und „falsch“ - einmal heißt diese eben „unbestimmt“ und einmal „Wahrheitswertlücke“.
- (Damit ergibt sich eine Lügner-Lösung.)

Der Unterschied zwischen Kripkes und der 3-wertigen Lösung Laut Kripke gibt es doch einen Unterschied: Zunächst gibt es einfach nur zwei Wahrheitswerte statt drei. Die dritte Kategorie ist *kein dritter Wert, sondern das Fehlen eines solchen*, nur eine Lücke. Weiters ist vor allem *die Begründung* Kripkes interessant:

Kripke unterscheidet 2 Arten von sinnvollen, eindeutigen, deutschen Aussagesätzen:

- A) Sätze in denen „wahr“ oder „falsch“ oder äquivalente Ausdrücke *nicht vorkommen*. Beispiele: „Der Schnee ist weiß“; „3 ist eine gerade Zahl“.
- B) Sätze, in denen „wahr“ oder „falsch“ oder äquivalente Ausdrücke *vorkommen*. Beispiele: „Der Schnee ist weiß‘ ist wahr“; „3 ist eine gerade Zahl‘ ist falsch“.

Nun stellen wir uns vor, es gibt zwei Behälter mit den Namen „W“ und „F“. In diese Behälter kommen einzelne Sätze: solche die wahr sind, in den Behälter W und solche die falsch sind, in den Behälter F. Wir brauchen jetzt noch Regeln, nach denen wir die Sätze einordnen können. Dazu stellen wir uns vor, eine Person kann zwar ganz gut Deutsch, aber sie kennt die Wörter „wahr“ und „falsch“ nicht - wir müssen es erklären, was das bedeutet. Die Person wird sich dann auskennen, wenn sie selbständig in der Lage ist, die Sätze den Behältern (richtig) zuzuordnen.

Regeln:

1. Sätze der Art A, bei denen es berechtigt ist, ihn zu behaupten, kommen in den Behälter W.
2. Sätze der Art A, bei denen es berechtigt ist, ihn zu leugnen, kommen in den Behälter F.
Unsere Beispielsätze sind so eindeutig in W oder F einzuordnen. Bei manchen Sätzen fehlt uns zwar das Faktenwissen, aber wir könnten sie einordnen, wenn wir das Wissen hätten.
3. Sätze der Art B: Wenn er behauptet „S ist wahr“ und $S \in W$, kommt er in den Behälter W; wenn $S \in F$, kommt er ihn F.
4. Sätze der Art B: Wenn er behauptet „S ist falsch“ und $S \in W$, kommt er in den Behälter F; wenn $S \in F$, kommt er ihn W.

Kripke bezeichnet einen Satz als *fundiert* (grounded), wenn es aufgrund der Regeln 1 - 4 klar ist, in welchen Behälter er gehört. Jetzt kann man zeigen, dass der Lügnersatz S1 nicht fundiert ist! S1 besagt, S1 ist falsch. Er muss also nach Regel 4 eingorndet werden - dafür ist es aber notwendig, zu wissen, wo S1 eigenordnet ist. Man kommt in einen Regress: Um den Satz einzuordnen, müsste man schon vorher wissen, in welchen Behälter er eigengordnet ist. Es ist also nicht möglich S1 einzuordnen!

Sätze der Form „S ist wahr“ können schon fundiert sein, aber der Lügnersatz S1 ist wegen seiner Selbstbezüglichkeit nicht fundiert. So kommt man zur Wahrheitswertlücken-Prinzip und damit einer Lösung für den schwachen Lügner.

Diesen Ansatz kann man auch noch genauer erklären , wenn man Fundierungsgrade unterscheidet (für „fundiert im Grad n“ schreiben wir kurz: *fundiert_n*):

1. S ist *fundiert₀*, gdw. S von der Art A ist und S (nach den Regeln 1 oder 2) in W oder F eingeordnet werden kann.
2. S ist *fundiert₁*, gdw. S von der Art B ist und der Satz, von dem S spricht ist *fundiert₀*.
3. S ist *fundiert₂*, gdw. S von der Art B ist und der Satz, von dem S spricht ist *fundiert₁*.
4. usw.

Wenn wir den Lügnersatz betrachten, sehen wir: S1 besagt, S1 ist falsch; damit:

- Er ist nicht *fundiert₀*
- Er ist nicht *fundiert₁* - also fundiert und außerdem *fundiert₀*
- usw.

S1 kann also in *keinem Grad* fundiert sein! Das verleiht ihm einen Sonderstatus - er ist einfach **unfundiert**. Das berechtigt dazu, zu sagen, S1 hat keinen Wahrheitswert - und daher: Es gibt Sätze, die keinen Wahrheitswert haben! Es geht dabei aber nicht um sinnlose Sätze (wie etwa „Wien ist die Quadratwurzel aus einer demokratischen Staastverfassung“), sondern um sinnvolle, eindeutige, deutsche Aussagesätze.

Die folgende Diskussion dieses Ansatzes hat eingeräumt, dass Kripke es gelungen ist, zu zeigen, dass S1 einen Sonderstatus hat. Aber die Lösung hilft ebenfalls *nicht gegen den verstärkten Lügner*, der das Bivalenzprinzip nicht voraussetzt! (Denn der truth-value-gap-Ansatz lehnt das Bivalenzprinzip ab.)

6. Einheit - 17. 11. 2009

7.1 Wiederholung

Das Problem mit Ansätzen, die drei Kategorien für alle Sätze erlauben - abweichend von der klassischen Logik - ist, dass alle Begriffe (Folgen, Junktoren, ...) neu definiert werden müssen!

Kripkes Lösung des schwachen Lüngers versagt beim verstärkten Lügner.

Ein anderer Vorschlag, alle selbstbezüglichen Sätze auszuschließen, betrifft **zuviel**. Es gibt auch unproblematische selbstbezügliche Sätze. Ein Beispiel:

B: Das was in diesem Rechteck steht, ist wahr.

Hier taucht kein Widerspruch auf. Warum sollte ein solcher Satz nicht erlaubt sein?

7.2 Bolzanos Beitrag

Bolzano hat eine umständliche Version der folgenden Sätze aufgestellt:

1. Dieser Satz hat vier Wörter.
2. Dieser Satz hat nicht vier Wörter

Es sieht hier so aus, als wäre der gleiche Satz falsch und auch seine Verneinung! Also liegt der Widerspruch vor, dass er wahr und zugleich falsch ist.

Die Lösung lautet, dass die Sätze (1) und (2) nicht über das gleiche sprechen: (1) spricht über (1) und (2) spricht über (2) - also liegt kein Widerspruch vor.

Das führt uns weiter zu der Frage, WAS eigentlich wahr oder falsch ist(sein kann). Ist es jeweils

- ein Satz-Exemplar
- ein Satz-Typus oder
- eine Propostion?

7. Einheit - 24. 11. 20009

8 Dialektischer Lösungsansatz

Nach diesem Ansatz kann ein Satz zwei Wahrheitswerte gleichzeitig haben. Er geht auf GRAHAM PRIEST zurück; dieser meinte, dass es fließende Übergänge zwischen Wahrheit und Falschheit gibt. Als Beispiel kann das Verlassen eines Raumes dienen: Eine Person steht um 15:53:10 auf, ist um 15:53:56 bei der Tür, und um 15:54:01 hat sie die Türschnalle in der Hand, öffnet die Tür, ... um 15:54:32 hat sie die Tür hinter sich geschlossen. Ist in diesem Fall der Satz „Die Person hat um 15:54:09 den Raum verlassen“ wahr oder falsch? - Laut Priest ist dieser Satz wahr und falsch zugleich.

Die Ausgangsüberlegung sind also *Sätze, die wahr und falsch gleichzeitig sind*. Das kommt etwa vor bei fließenden Übergängen („Georg ist reich“) oder bei unscharfen (vagen) Begriffen („Hans ist erwachsen“) vor. Priest nimmt an:

- Es gibt genau zwei Wahrheitswerte (nicht wie beim dreiwertigen Lösungsansatz!)
- Jeder Satz hat *mindestens einen* Wahrheitswert (nicht wie bei Kripkes Ansatz!)
- Ein Satz kann aber auch zwei Wahrheitswerte gleichzeitig haben (Das Bivalenzprinzip wird geleugnet).

Welche Möglichkeiten gibt es hier als für einen Satz? Er kann sein:

1. wahr
 - 1.1 nur wahr
 - 1.2 auch falsch
2. falsch
 - 2.1 nur falsch
 - 2.2 auch wahr

1.2 und 2.2 nennt man in diesem Fall *dialetea* - daher spricht man vom dialektischen Lösungsansatz. Oder anders dargestellt- er ist entweder:

1. nur wahr, oder

2. nicht nur wahr
 - 2.1 nur falsch
 - 2.2 Dialetea

Mit der Leugnung des Bivalenzprinzips hat man automatisch eine *Lösung des schwachen Lügners*, weil dessen Argumentation eben darauf aufbaut (bei allen drei besprochenen Varianten).

Der nächste Prüfstein ist der verstärkte Lügner mit dem Lügnersatz S2. Hier kommt man schnell zu der gleichen paradoxen Konklusion ($S2 \leftrightarrow \neg S2$)

S2 ist nun nicht nur wahr und nicht nur falsch!

- (*1) S2 ist nur wahr
- (2) S2 ist wahr
- (3) S2 ist nicht wahr
- (4) S2 ist falsch
- (5) S2 ist nicht nur wahr
- (Widerspruch zu 1)

- (*1) S2 ist nur falsch
- (2) S2 ist falsch
- (3) S2 ist nicht wahr
- (4) S2 ist wahr (Konklusion s1 ??)
- (5) S2 ist nicht nur falsch
- (Widerspruch)

⇒ Daher ist S2 in diesem Ansatz eine dialetea!

Welche Konsequenzen bringt das mit sich? Die Definition des logischen Folgens muss neu definiert werden. Dafür gibt es vier Varianten:

1. Es darf nicht sein, dass alle Prämissen 1, aber die Konklusion 0 ist.
2. Es darf nicht sein, dass alle Prämissen 1, aber die Konklusion nur falsch ist.
3. Es darf nicht sein, dass alle Prämissen nur 1, aber die Konklusion 0 ist.
4. Es darf nicht sein, dass alle Prämissen nur wahr, aber die Konklusion nur falsch ist.

Die Paradoxie des *ex falso sequitur quodlibet* wird man durch die Definition 1) los. Damit ist die dialethische Logik ein *parakonsistentes System* - allerdings gilt dann aber der Disjunktive Syllogismus nicht mehr, der sehr plausibel ist. Es stellt sich die Frage, was wir aufgeben und was um welchen Preis beibehalten werden soll?

Dabei kann man sich die Frage stellen: Was ist rational? - Ist das Trivalenzprinzip vereinbar mit unserem Rationalitätsverständnis? Es besagt, dass es drei Möglichkeiten gibt, mit einem Satz umzugehen:

1. Der Satz soll akzeptiert werden.
2. Der Satz soll geleugnet werden
3. Der Satz soll „in Schwebe“ gehalten werden.

Stellen wir uns eine Theorie der Rationalität vor, die regelt, wann 1, 2, oder 3. angemessen ist. Sie hat folgende Regeln:

- R1: alles Wahre soll akzeptiert werden.
- R2: alles Falsche soll verworfen werden.

R1 und R2 führen in der dialetischen Logik zu Widersprüchen! Vielleicht sind folgende Regeln angemessener:

- R1': nichts Wahres soll verworfen werden.
- R2': nichts Falsche soll akzeptiert werden.

Passt das besser zum dialetischen Ansatz? (Nehmen wir an, es *gibt wirklich* Dialetea!!)

8. Einheit - 1.12. 2009 / Mitschrift: Stefan Reichmann

8.1 Wiederholung: der verstärkter Lügner im dialetischen Lösungsansatz

Der verstärkte Lügner:

S2: Das was in diesem Rechteck steht, ist nicht wahr.

Wenn S2 als nur wahr angenommen wird, kommt man zu einem Widerspruch - auch wenn S2 als nur falsch angenommen wird. Also ist S2 eine Dialetea!

Nach dem Dialethischen Ansatz gibt es auch wahre Widersprüche:

$$(H \wedge \neg H)$$

Wenn H wahr und falsch ist, ist auch $\neg H$ wahr und falsch; damit ist auch die ganze Konjunktion wahr und falsch.

Wir haben oben Rationalitätsprinzipien formuliert; R1 und R2 widersprechen aber der dialetischen Logik, denn es muss auch Sätze geben, die „in der Schweben“ gehalten werden. Die Prinzipien sind anscheinend zu stark: Es gibt auch wahre Sätze, für die keine guten Gründe sprechen (z. B. bei Wahrscheinlichkeiten). Daher müsste man sagen R1*: Alles Wahre, wofür es gute Gründe gibt, soll akzeptiert werden. So ergibt sich aber wieder das gleiche Problem: Es gibt gute Gründe, dialetheas sowohl anzuerkennen, als auch zu verwerfen \Rightarrow Dialetheas sollen demnach in Schweben gehalten werden (rationalerweise).

Grenze der Rationalität Dialethische Logiker tolerieren einfach Widersprüche. Das ist eine *Immunitätsstrategie*: Der dialetische Ansatz scheitert beim Lügnersatz, das führt zu Widersprüchen. Die Widersprüche werden als nicht weiter schlimm angesehen.

9 Ansatz von Gupta

Eine Möglichkeit zur Lösung des schwachen Lügners ist, das Bivalenzprinzip zu leugnen. Eine Variante davon ist die Annahme von instabilen Wahrheitswerten.

Diese Frage hat man sich im Mittelalter gestellt; beispielsweise in folgender Form:

Sokrates: Was Platon sagt, ist wahr.

Platon: Was Sokrates sagt, ist falsch.

Dann sieht das so aus:

Sokrates - Platon

1	w	\Rightarrow	w
2	f	\Rightarrow	f
3	w	\Rightarrow	...

So entstehen oszillierende Wahrheitswerte - auch beim schwachen Lügner.

Die Frage ist: greift dieser Ansatz auch beim starken Lügner?

(Mitschrift Stefan Reichmann Ende)

Alle Vorschläge die das Bivalenzprinzip haben das gleiche Problem: sie nützen nichts bei Lügner-Versionen, die das Bivalenzprinzip nicht voraussetzen - sie helfen nur gegen den schwachen Lügner!

Es können aber auch andere Prämissen angegriffen werden, nämlich:

- S ist ein sinnvoller, eindeutiger, deutscher Aussagesatz (sieh unten)
- korrespondenztheoretische Prämisse

10 Die Cassatio-Lösung

Dieser Ansatz behauptet, der Lügnersatz (S1 bzw. S2) ist unsinnig. Der Name kommt vom lateinischen *cassatio* für Kauderwelsch, unsinniges Gewäsch. Diese Lösung war im Mittelalter sehr verbreitet; am Bivalenzprinzip hat man nicht gerüttelt - aber man hat gemeint S1 bzw. S2 ist kein sinnvoller Satz. Grammatikalisch ist es natürlich ein deutscher, eindeutiger Aussagesatz, aber er soll nicht sinnvoll sein. Warum?

Antwort 1: Weil er zu paradoxen Konsequenzen führt, das sieht man ja!

Gegen diese Antwort kann man einwenden, dass sie zirkulär ist. Sie verläuft so:

1. Es kommt zu einem Widerspruch.
2. Warum?
3. S1/S2 ist sinnlos.
4. Warum?
5. Weil (1)

Das ist also eine *petito principii*.

Antwort 2: Das, was bei S1 bzw. S2 schief läuft (sinnlos ist), ist ihre Selbstbezüglichkeit. Im Alltag verwenden wir keine selbstbezüglichen Sätze, aber sie sind problematisch.

Entgegnung: Es gibt selbstbezügliche Sätze, die nicht problematisch sind - z. B. „Dieser Satz hat fünf Wörter.“ Dieser Satz ist wahr und wenn er wahr ist, muss er auch sinnvoll sein! Ein anderes Beispiel:

B: Das was in diesem Rechteck steht, ist wahr.

Wenn B wahr ist, ist B wahr; wenn B falsch ist, ist B falsch. Es taucht kein Widerspruch auf, B ist wahr und daher *sinnvoll und selbstbezüglich*. Die Sinnlosigkeit der Lügnersätze S1 und S2 kann - so gegeben - jedenfalls nicht an der Selbstbezüglichkeit (alleine) liegen!

Wenn das Problem der Lügner-Paradoxie tatsächlich an der Selbstbezüglichkeit liegt und wenn der Lügnersatz (S1 bzw. S2) tatsächlich *cassatio* ist, versagen diese Lösungen aber doch bei folgender Variante:

11 Das Karten-Paradoxon

Hier gibt es zwei Lügner-Sätze:

S3: Das was im einfachen Rechteck steht ist wahr

S4: Das was im doppelten Rechteck steht ist nicht wahr

Hier liegt keine Selbstbezüglichkeit vor. S3 spricht nicht über S3 und S4 spricht nicht über S4 (es ist höchstens eine indirekte Selbstbezüglichkeit). Der Name der Paradoxie kommt von einer Postkarte, auf der vorne S3 und hinten S4 steht.

Wir sehen, dass wir hier wieder zu einem Widerspruch kommen - und das ohne das Bivalenzprinzip vorauszusetzen und ohne selbstbezügliche Sätze. Daher scheitern alle cassatio-Lösungen, die behaupten, die Wurzel des Übels liegt in der Selbstbezüglichkeit.

Die Lösung von R. Martin und Woodruff , behauptet zwar, dass S3 und S4 sinnlos (cassatio) sind, aber nicht, dass diese Sinnlosigkeit an der Selbstbezüglichkeit liegt. Sinnlos sind demnach alle bisherigen Lügnersätze - daher wirkt die Lösung auch für alle Varianten - aus Gründen, die in der nächsten Einheit besprochen werden. Die Universalität der Lösung war eines unserer Bewertungskriterien, bei dem diese Lösung damit sehr gut abschneidet.

Nach Martin sind nicht alle selbstbezüglichen Sätze sinnlos (siehe auch z.B. Satz B oben).

Das Lügner-Paradoxon Die Argumentation läuft hier so:

- (* 1) S3 besagt, dass S4 wahr ist
- (* 2) S4 besagt, dass S3 nicht wahr ist.
- (* 3) S3 und S4 sind sinnvolle, eindeutige, deutsche Aussagesätze.
- (* 4) Für jeden sinnvollen, eindeutigen, deutschen Aussagesatz, der besagt, dass XY gilt: Er ist wahr, gdw. XY.
- (5) S3 ist ein sinnvoller, eindeutiger, deutscher Aussagesatz, der besagt, dass S4 wahr ist (1, 3)
- (6) S3 ist wahr gdw. S4 ist wahr (4,5)
- (7) S4 ist ein sinnvoller, eindeutiger, deutscher Aussagesatz, der behauptet S3 ist nicht wahr (2,3)
- (8) S4 ist wahr gdw. S3 nicht wahr ist (4,7)
- (9) S3 ist wahr gdw. S3 ist nicht wahr.

wir formalisieren: P: „S3 ist wahr“; Q: „S4 ist wahr“. Damit lautet:

- (6) $P \leftrightarrow Q$, und
 - (8) $Q \leftrightarrow \neg P$
- und so: $\models (9) P \leftrightarrow \neg P$

Neben den zwei Lügnersätzen S3 und S4 werden nur die Prämissen 3 und 4 vorausgesetzt: Es ist keine Rede vom Bivalenzprinzip und Selbstbezüglichkeit! Die Cassatio-Lösung besteht hier darin, Prämisse 3 zurückzuweisen. Nur: Wie wird das begründet?

10. Einheit - 12. 1. 2010

12 Die Lügner-Lösung von Martin

Diese Lösung beruht auch auf der Behauptung, der Lügner-Satz ist sinnlos. Warum? Martin beschränkt sich in seiner Analyse auf Subjekt-Prädikat-Sätze der folgenden Form:

S ist (ein) P. - oder: *S ist nicht (ein) P.*

An der Stelle von S steht ein Eigename oder eine singuläre Kennzeichnung, z. B. „Kant“, „Der Autor der Kritik der reinen Vernunft“. P steht für einen Klassenbegriff, z.B. „Philosoph“. Die besprochenen Lügner-Sätze haben ebenfalls die (negative) Form.

Anwendungsbereich Für alle Prädikate gibt es einen Anwendungsbereich (range of applicability). Dieser ist nur unschaft, aber grob doch angebbbar. Zum Beispiel gehören zum Anwendungsbereich von „Philosoph“ alle Menschen, nicht aber die Zahlen, Städte, etc.

Ein Satz ist bei Martin nur dann sinnvoll, wenn S zum Anwendungsbereich von P gehört.

Beispiele: „Kant ist ein Philosoph“ - sinnvoll; „Wien ist ein Philosoph“ - sinnlos bzw. semantisch unkorrekt oder Kategorienfehler.

Dabei gilt: Wenn ein sinnloser Satz negiert wird, erhält man wieder einen sinnlosen Satz; wenn ein sinnvoller Satz negiert wird, bekommt man wieder einen sinnvollen Satz (der dann eventuell falsch ist).

Wie sieht das beim Lügner-Satz aus? -

S2: Das, was in diesem Rechteck steht, ist nicht wahr.

S2 ist genau dann ein sinnvoller, eindeutiger deutscher Aussagesatz, wenn der positive Satz (ohne „nicht“) sinnvoll ist, aus dem er hervorgegangen ist. Also:

S2pos: Das, was in diesem Rechteck steht, ist wahr.

S2pos ist genau dann sinnvoll, wenn S zum Anwendungsbereich von P gehört - also dann, wenn „Das, was in diesem Rechteck steht“ zum Anwendungsbereich von „wahr“ gehört. Daher lautet die nächste Frage: Was ist der Anwendungsbereich von „wahr“? Die Antwort lautet: sinnvolle, deutsche Aussagesätze.

Noch einmal: Es geht so:

- 1) Um fest zustellen ob der Satz im Rechteck (S2pos) sinnvoll ist, muss man schauen, ob sein S zum Anwendungsbereich von P gehört - also ob S zum Anwendungsbereich von „wahr“ gehört.
- 2) Dafür muss man überprüfen ob der Satz im Rechteck sinn voll ist. Man kommt so in einen Zirkel - um die Sinnhaftigkeit festzustellen, müsste man schon über die Sinnhaftigkeit Bescheid wissen. Daher ist *nach Martin nicht begründbar*, dass S2 sinnvoll ist.

Einwand von Mar: Martin hat damit nur gezeigt, dass man *nicht beweisen* kann, dass S2 sinnvoll ist - und selbst das gelingt nur, wenn man alle seine Voraussetzungen akzeptiert. Er kann damit aber nicht beweisen, dass der Lügner-Satz *tatsächlich sinnlos ist*. Damit liegt ein *argumentum ad ignorantiam* vor: Man schließt von der Nichtbeweisbarkeit bzw. dem Nichtwissen der Sinnlosigkeit auf die Sinnlosigkeit. Das ist so, als ob man sagt: Wir können nicht (vielleicht niemals) beweisen, dass Aristoteles die Blutgruppe 0 negativ gehabt hat - darum hat Aristoteles nicht die Blutgruppe 0 negativ gehabt!

Weiterer Einwand von Mar: Wie kommt man auf die These, dass ein Satz sinnlos ist, wenn S nicht zum Anwendungsbereich von P gehört? Nach diesem Kriterium der Satz „3 ist eine Millionenstadt“ sinnlos. Warum sollte man nicht sagen, dass dieser Satz falsch ist? - Genauso falsch wie der Satz „3 ist eine gerade Zahl“.

Ein anderes Beispiel: „Kant ist eine Millionenstadt“ - das stimmt einfach nicht. Das ist genauso falsch wie: „Kant war Komponist“. Es ist nur viel leichter als falsch einzusehen; im zweiten Fall müssen wir etwas (mehr) über Kant wissen - beim ersten nicht. Sätze kommen uns merkwürdig vor, wenn wir ohne Wissen schon ihre Falschheit erkennen können.

Diese Diskussion gab es auch im Wiener Kreis, wo ebenfalls sinnlose Sätze ausgeschlossen werden sollten; damals aus Metaphysikkritik. Dagegen kam ein Einwand von Karl Popper: Eingrenzungen helfen nichts.

Die Cassatio-Lösung hätte den Vorteil, alle Lügner-Varianten zu erfassen!

13 Die Lösung von Alfred Tarski

Am Anfang steht die Frage, was es heißt, dass S1 (oder allgemein ein Satz) ein sinnvoller, eindeutiger *deutscher* Aussagesatz ist. Tarski hat unterschieden, Deutsch als:

1. „Umgangssprache“: Damit meinte er das ganze Deutsch samt Hoch- und Umgangssprache.

2. deutsche Teilsprache

Wenn mit „deutsch“ 1) gemeint ist, dann ist klar, dass S1 sinnvoll ist. Man versteht ihn und er sagt einfach, dass er falsch ist. Die Prämissen 1 und 2 können nicht geleugnet werden, wenn man die Umgangssprache nimmt. Es kann also nur an der Prämisse 3 liegen - der korrespondenztheoretische Wahrheitsbegriff kann für die Umgangssprache nicht zutreffend sein - nur für spezielle Teilsprachen.

11. Einheit - 19. 1. 2010

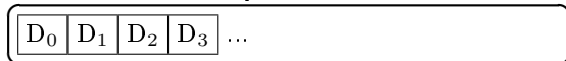
(eine halbe Stunde fehlt)

Tarski greift die korrespondenztheoretische Wahrheitsbedingung (Prämisse 3) an - Diese ist nicht auf die deutsche Umgangssprache anwendbar. Unsere Intuition ist zwar, dass es wahr ist, dass es schneit, genau dann wenn es schneit - aber diese Intuition ist falsch. Damit ergibt sich eine Lügner-Lösung, durch Leugnung der Prämisse 3.

Die deutsche Umgangssprache ist *universal*. Man kann unterscheiden zwischen

1. deutsche „Umgangssprache“ und
2. Teilsprachen

Wie sehen die Teilsprachen aus - diese sind nicht universal:



Es gilt:

- Im Bereich D₀ kann man über alles sprechen, außer über D₀ - erlaubt ist also z. B. (K): Kant ist ein Philosoph. Aber nicht erlaubt ist (X): Der Satz „Kant ist ein Philosoph“ ist wahr“ - o. ä.
- In D₁ kann man über alles sprechen, außer über D₁ - aber auch über D₀. Erlaubt ist also z. B. der Satz (X) - aber nicht erlaubt ist: Der Satz (X) besteht aus 8 Wörtern.
- Dafür benötigt man D₂ - hier kann man über alles sprechen, worüber man in D₁ sprechen kann (damit auch z. B.: Der Satz (X) besteht aus 8 Wörtern) aber man kann nicht über Sätze von D₂ sprechen!

Jede dieser Sprachteile D₀ - D_n ist *semantisch restringiert*. In jedem dieser Bereiche sind mehr Sätze erlaubt (als im niedrigeren), aber nicht alle - keiner dieser Teile ist universal. Alle sind sie Teilsprachen des Deutschen. Man nennt sie auch *Sprachstufen* - daher kommt die Bezeichnung *Tarskis Sprachstufentheorie*.

Warum soll man nicht aus der deutschen Umgangssprache einzelne Teile herausstanzen können? Was ist die Folge? Man kann unendlich viele Sprachstufen bilden, die jeweils zunehmend reichhaltiger sind - aber *in keiner dieser Sprachstufen kann man einen selbstbezüglichen Satz bilden!* Nun können wir uns wieder fragen: In welcher Sprache ist der Lügner-Satz S1 formuliert?

1. Entweder in der deutschen Umgangssprache: dann stimmt die Prämisse 3 nicht; oder
2. in einer Teilsprache: Das kann nicht sein, weil sich S1 dann auf der Stufe D_n und D_{n+1} gleichzeitig befinden müsste! Damit ist dann die Prämisse 2 falsch - und zwar nicht, weil S1 sinnlos ist, sondern, weil S1 gar nicht gebildet werden kann.

Zur Verdeutlichung von 2: Angenommen, S1 ist ein sinnvoller D₈₈-Satz. Dann müsste

S1: Das, was in diesem Rechteck steht, ist falsch. auf der Stufe D₈₉ stehen.

Tarskis Lügner-Lösung besteht also darin, zu sagen, dass alle selbstbezüglichen Sätze nicht wohlgeformt sind.

Kritik: Alle selbstbezügliche Sätze werden damit ausgeschlossen - die Lösung ist zu radikal!

Denken wir nur an B: Das was in diesem Rechteck steht, ist wahr. oder: „Dieser Satz besteht aus sechs Wörter.“

ENDE DER VORLESUNG